הרצאה 7

24 במאי 2017

מטרה: להוריד את מהספר הקודקודים בפוליהדרון שלנו.

דרכי מדידה לטיב האפרוקסימציה:

- הפרש סימטרי - סכום הנפחים שנמצאים בפוליהדרון אחד ולא באחר
- מרחק hausdorff מכוון

$$d_{H\to}\left(X,Y\right)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}d\left(x,y\right)$$

- מרחק hausdorff

$$d_{H}\left(X,Y\right)=\max\left(\max_{x\in X}\min_{y\in Y}d\left(x,y\right),\max_{y\in Y}\min_{x\in X}d\left(x,y\right)\right)$$

- מרחק $frechet$ - נציג זאת באופן ציורי, שתי זוג עקומים, על אחד מהם הולך כלב ועל אחד אדם וביניהם רצועה.
שניהם הולכים קדימה בקצבים משתנים אך לעולם לא אחורנית, לכל טיול אפשרי כזה נסמן d_w המרחק המקסימלי, מרחק frechet הינו

$$\min_{w}\left(d_{w}\right)$$

.

הגדרה 0.1 יהי $\varepsilon>0$ נגיד כי פוליטופ P הוא פוליטופ ε מקורב לגוף קמור K אם המרחק hausdorff בינהם לכל היותר ε

.

לכל $\varepsilon\leq1$ כל גוף קמור K יכול להיות ε מקורב על ידי פוליטופ קמור ב $O\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(d-1)/2}\right)$ פאות

ישנם תוצאות דומות עבור קודקודים

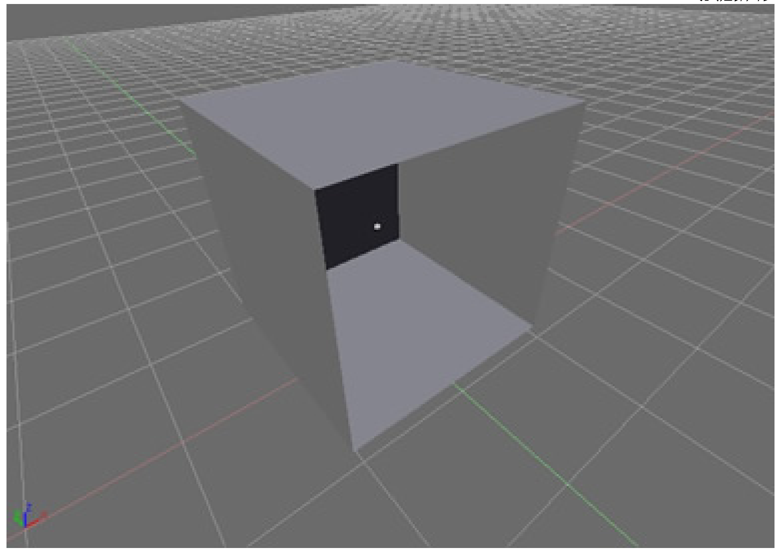
היוריסטיקת דאגלס-פוייקר: קלט : קו פוליגונלי וסף ε
מטרה: עקום פוליגונלי שמרחקו מכל קטע בקו הקלט לכל היותר ε
אלגוריתם רקורסיבי: נתחיל מקטע בין הנקודה הראשונה לאחרונה בקלט
כעת נמצא את הנקודה במרחק המקסימלי ממנו על עקום הקלט
נשנה את העקום שלנו להיות קטע בין נקודת ההתחלה ולנקודה החדשה בנוסף לקטע מהנקודה החדשה לאחרונה.
נחזור על התהליך ברקורסיה עד שנקבל שהמרחק המקסימלי קטן מε
סיבוכיות : $O\left(n^{2}\right)$ במקרה הגרוע - זאת משום שכל שלב לוקח $O\left(n\right)$ כי אנו עוברים על כל הסגמנטים במקרה הרע,
ועושים $O\left(n\right)$ צעדים במקרה הרע (כל סגמנט בתורו מהווה את המקסימום).
אפשר יותר טוב:
ניתן לעשות זאת כאשר אנו מוצאים קמור, נסתכל רק על הצד העליון,
הצד העליון שלו ממיין את השיפועים, נרצה "להוריד ישר מלמעלה" עד שנמצא את את הקודקוד הראשון שהוא חותך
פעולה את היא בעצם חיפוש בינארי על השיפועים.
אך נוצרה לנו בעייה נוספת, הקמור שונה בכל שלב! אזי יש מבנה נתונים שמטפל בעניין ומאפשר אלגוריתם ב$O\left(n\log n\right)$
אך יש לו שתי חסרונות:

1. הוא מניח שהעקום המקרב לא חותך את עצמו
2. בפרקטיקה הוא נופל מדאגלס-פוייקר

איך העולם מתמודד עם המודלים הענקיים של STL:

מש משולשי: אוסף של משולשים, לכל קודקוד כתוב מיקומו התלת מימדי
בנוסף נתאר בעזרת גרף פשוט את המעבר בין משולשים (ניתן

מש משולשי 2 מניפולדי: לא מכיל קשתות וקודקודים שאינם רבי־פנים (רבי פנים ־ manifold)
לא מכיל חיתוכים עצמיים
לדוגמא:



קירוב משטח הינה בעיה קשה: בהינתן קבוצת נקודות S עם N נקודות שנדגמו מפונקציה דו־מקומית $f\left(x,y\right)$,ופרמטר $\varepsilon>0$
צריך לתאר פונקציה לינארית $T\left(x,y\right)$ עם סיבוכיות קודקודים,קשתות ופאות מינימלית.
כך שמתקיים

$$\left|T\left(x_{p},y_{p}\right)-z_{p}\right|\leq\varepsilon\text{ for all }\left(x_{p},y_{p},z_{p}\right)\in S$$

בעיה זאת היא NP־קשה!
נרצה אם כך להשתמש בהיוריסטיקות:

פעולות צמצום מקומיות:

1. ניקח קודקוד ואת כל המשולשים שחלים בו ־ נזרוק אותו ונשלש את החור שנוצר
2. נאחד זוג קודקודים צמודים (edge collapse)
3. ניקח זוג קודקודים, ונשים קודקוד אחד על השני (דומה למספר 2) (halfedge collapse)

אלגוריתם:

1. נחשב את הקנס עבור כיווץ של כל קשת
2. נשים אותם בערימת מינימום
3. נוציא את המינימלי, ונשב מחדש את הקנס עבור השכנים שלו
4. וחוזר חלילה

.

כללים:

1. אם P וQ על ההיקף הקשת (p,q) חייבת להיות על ההיקף
2. לכל קודקוד שמשתף צלע עם QP חייב להיות המשולש (p,q,r)

.

איך ניתן קנס לקשת: בכל שלב כל משולש t_{i} קשור לאיזשהו אוסף משולשים מהחבילה המקורית (שהוא נוצא מהם)
אנחנו רוצים להבטיח שהמש נשאר מרחק $\varepsilon-hausdorff$ מהמש המקורי.

error quadrocs- ניקח נקודה p_j נסתכל על אוסף המשולשים שחלים בנקודה p_j לכל אחד מהם נתסכל על המשפחה המקורית, נרצה להביא למינימום את סכום ריבועי המרחקים של p_j מכל המישורים האלה. בצורה זאת גם נידע לאן להזיז את p_j וגם מה הקנס שלה ונוכל להכניס אותה לערימה.

קיימת מטריצה 4X4 שאם נכפיל

$$v^T A v$$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

נקבל את המרחבים של המשולשים המקוריים (לא בדיוק ברור איך עדיין)

כאשר אנו מקבצים שני קודקודים, אנו צריכים לשמור בקודקוד החדש את חיבור המטריצות.

*בנוסף ניתן להשתמש בerror quadrocs גם רק למציאת המיקום של p_j ולבחור קנס מסוג אחר.

גישה אחרת - לא צריך לזכור את ההיסטוריה: כמו הגישה של לינדסרום וטורק שממומשת בCGAL