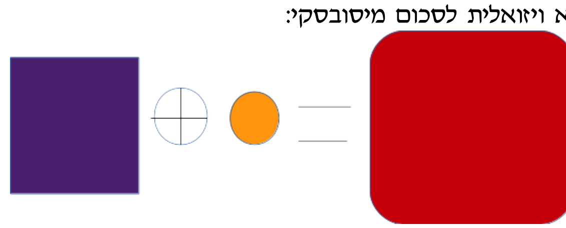
הדפסת תלת מימד שיעור 4

4 באפריל 2017

סכומי מינקובצקי: חזרה:
סכום מיסובסקי של זוג נקודות: $\{(x_1, y_1)\} \oplus \{(x_2, y_2)\} = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\}$
סכום מינקובסקי של זוג פוליהדרונים: $A \oplus B = \{a \oplus b | a \in A, b \in B\}$

- לכל כיוון, ניקח נקודה בP_1 הרחוקה ביותר בכיוון זה וכן נקודה רחוקה ביותר בP_2 בכיוון זה, נחבר אותם וקטורים ונקבל את הנקודה הרחוקה ביותר בכיוון זה ב$P_1 \oplus P_2$
- סכום מינקובסקי של פוליגונים קמורים הוא קמור

דוגמא ויזואלית לסכום מיסובסקי:



- במישור נקבל $m + n$ קודקודים בסכום מינסובקי
- במרחב נקבל $m \cdot n$ קודקודים בסכום מינסובסקי
- מפת גאוסיינים נותנת בדיוק את הקודקוד הקיצוני של כל פוליגון בכל כיוון, אם נשים מפות גאוסיינים של שני פוליגונים אחת על השנייה, נקבל בדיוק את הקודקוד הקיצוניים ביותר בכל כיוון אותם יש לחשב וככה נוכל בקלות לחשב את סכום מיסובסקי שלהם (של פוליגונים קמורים).

אפשר ללמוד יותר על חישוב מפת גאוסיינים בתזה של ד"ר אפי פוגל, יעלה לאתר רפרנס.

טענה 0.1 אם נקבל שתי קבוצות B,A הן נחתכות אם ורק אם סכום מיסקובצקי $A \oplus (-B)$ מכיל את הראשית, כאשר B- הינו שיקוף דרך הראשית

הוכחה: $A \cap B \neq \phi \iff (0, ..., 0) \in A \oplus (-B)$ ⇒נניח החיתוך לא ריק, אזי קיימת נקודה $(a_x, a_y) = (b_x, b_y)$
אזי מתקיים $0 = (a_x - b_x, a_y - b_y) \in A \oplus (-B)$
⇐ נניח שמתקיים $0 \in A \oplus (-B)$ אזי מתקיים שקיימות זוג נקודות $(a_x, a_y), (b_x, b_y)$ שמקיימות $(a_x - b_x, a_y - b_y) = (0, 0)$ ומכאן שמתקיים $a_x = b_x, a_y = b_y$

■

חזרה לעומק חדירה: עבור B,A פוליהדרונים ב$\mathbb{R}^3$המרחק המינימלי שצריך להזיז את A בכיוון כלשהו כדי שהחיתוך בינהם יהיה ריק

$$\pi (A, B) = min \left\{ ||t|| \, | int (A + t) \cap B = \phi, t \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

איך נחשב את עומק החדירה של שני פוליהדרונים קמורים בתלת מימד

1. קודם כל נבדוק האם הם נחתכים, אם לא התשובה היא 0 (עושים זאת על ידי בעיית תכנות לינארי לפי חיתוך של חצאי מרחבים שיוצרים הפאות שלהם)
2. אנו יודעים כי B,A נחתכים, זאת אומרת בפרט הסכום $(-A) \oplus (B)$ מכיל את הראשית, כעת נחפש וקטור T כך שנזיז את A ונוציא את הראשית מסכום מינקובסקי, אזי נסתכל על הראשית ונחפש את הדרך הכי קצרה ממנה החוצה מסכום מינקובסקי.
3. נעבור פאה פאה, ונראה את המרחק בין נקודת הראשית לפאה (במאונך לפאה), ונבחר את המרחק המינימלי, וכך נקבל את עומק החדירה.

אנחנו רוצים לתאר אלגוריתם קירוב לחישוב הרוחב, אנחנו מקבלים קובץ STL וε ונחזיר רוחב עם טעות עד ε
על מפת הגאוסיינים S^2 נשים גריד צפוף שהמרחק בין זוג נקודות בגריד הן $\sqrt{\varepsilon}$ (ברדיאנים), כך שהמרחק של כל נקודה בכדור מנקודה בגריד הוא לכל היותר $\sqrt{\varepsilon}$.
כעת ניקח כל נקודה על הגריד ונשאל מה עומק החדירה בכיוון זה, ניקח את התוצאה הקטנה ביותר וטוען שזהוא w' שמקיים $w' \leq w + \varepsilon$

הסיבה שזה מתקיים היא:
v הוקטור שמגדיר את העומק
u הוקטור הקרוב אליו ביותר על הגריד (זה שחישבנו)

$$||u|| \leq \frac{||v||}{\cos\alpha} \leq \frac{||v||}{1-\frac{\alpha^2}{2}} \leq \left(1+\alpha^2\right)||v|| \leq (1+\varepsilon)\,||v||$$

סיבוכיות:

$$O\left(m+n+\frac{\log^2(m+n)}{\varepsilon}\right)$$

שתי הערות:

1. הקאץ בסיפור הוא איך בהינתן כיוון אחד ספציפי לחשב את עומק החדירה בלי לחשב את כל סכום המינקובסקי, זה לא ניתן להפקה ביעילות ממפת הגאוסיינים, כדי לעשות פעולה זאת ביעילות אנו צריכים להשתמש במבנה מתוחכם, שעובד בזמן $\log^2(m+n)$
2. למה חישבנו עומק ולא רוחב, הטענה שלמעלה לא בהכרח נכונה על רוחב...