שיעור 2 אלגוריתמים להדפסה

20 במרץ 2017

רוחב כיווני (directional width):
הרוחב של פוליגון Q בכיוון u מסומן $W_Q(u)$,
הוא שווה למרחק בין הישרים עם הנורמלים u,u־ שמשיקים לפוליגון.
רוחב הפוליגון:
רוחב הפוליגון שווה ל

$$min_u W_Q(u)$$

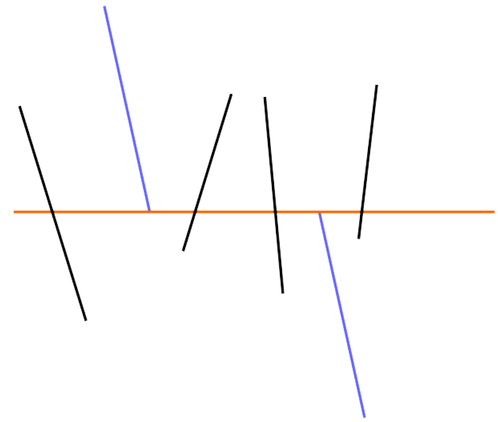
בעיה:
חלקים זהים נשפכים למסוע, רובוט צריך לקחת את החלקים מהמסוע, כאשר כל פעם החלקים בסיבוב שונה.
פתרון של גולדברג:
נבצע סדרת פעולות על החלק שתגרום לו לסיים באותה אורנטייציה ללא תלות באורנטצייה המקורית.
האלגוריתם של גולדברג מקבל חלק ולפי פונקציית הרוחב מתכנן סדרת פעולות כזאת.
בעיה 2:
נתונים אוסף של חלקים קמורים במישור וכיוון במישור, הם זרים בפנים שלהם.
אנו מעוניינים ליצור להם סדרת הפרדה, זאת אומרת סדרה של חלקים שאנו מזיזים לכיוון זה,
כך שכל חלק שאנו מזיזים לא מתנגש חלקים שעדיין לא הזזנו.
בדו־מימד תמיד יש פתרון, אך הדבר לא נכון בתלת מימד.
מקרה פשוט:
יש לנו אוסף של סגמנטים במישור, הכיוון ־ הכיוון החיובי של ציר הx

טענה 0.1 תמיד קיימת סדרת הפרדה
אנו מסתכלים קרניים שמגיעות מקבילות (אופקיות), מ$x=+\infty$
ומתסכלים על סט הסגמנטים שהקרניים האלה רואות את הנקודה העליונה בהם.
בסט זה קיים סגמנט עם הנקודה העליונה הנמוכה ביותר, זהו הסגמנט שאותו נוציא.
ניתן להוציא את הסגמנט הזה בהזזה לכיוון החיובי של ציר הx,
משום שאת הקודקוד העליון שלו הקרניים האין סופיות רואות ולכן אין שום שום שיפריע לו,
ואם נניח בשלילה שקיים סגמנט שמפריע בדרך לקטע תחתון יותר של הסגמנט נקבל שהקודקוד העליון שלו,
שהוא בדיוק מתאים לנקודה הראשונה בסגמנט שהוא מפריע לה, **נמוך** מהקודקוד העליון של הסגמנט שלנו,
וזו סתירה משום שהקרן האין סופית "רואה" את הקודקוד העליון הנ"ל ולכן הוא בסט שהגדרנו למעלה
ולכן לא ייתכן שלקחנו מלחתחילה את הסגמנט עם הקודקוד הלעיון הנמוך ביותר.

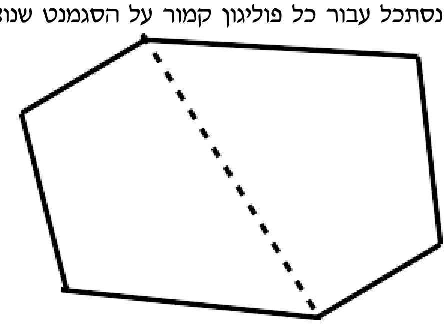
נגדיר יחס חסימה:
$s_i \overset{\text{blocks}}{\rightarrow} s_j$, אם הסגמנט s_i חוסם תת־קטע של s_j
וניצור גרף, הקודקודים הם הסגמנטים, ויש קשת מכוונת מs_i לs_j אם ורק אם מתקיים $s_i \overset{\text{blocks}}{\rightarrow} s_j$
נשים לב שגרף זה הינו DAG, ולכן ניתן למיין אותו טופולוגית.
נמיין את הגרף טופולוגית ($O(|V|+|E|)$),
נקבל כי סדר ההוצאה של הסגמנטים הוא בדיוק הסדר שלהם לאחר המיון הטופולוגי.
אלגוריתם נאיבי זה עובד בסיבוכיות $O(n^2)$.
אך ניתן לעשות יותר טוב.
כדי לקבל שכמות הקשתות הוא $O(n)$ נתסכל על יחס חסימה **ישיר** .
קיים יחס חסימה ישיר $s_i \overset{\text{direct blocks}}{\rightarrow} s_j$ אם ורק אם קיים ישר אופקי l שמקיים:

$$s_i \cap l >_x s_j \cap l \ \wedge l \text{ does not cut any other segment betwin } s_i \text{ and } s_j$$

כדי למצוא רק את הזוגות שמקיימים יחס חסימה ישר נעשה סוויפ ליין לפי קודקודי הסגמנטים.
אירועי הסוייפ ליין הם קודקודי הסגמנטים.



באירוע קודקוד עליון, אנחנו צריכים להוסיף 2 חסימות,
חסימה של הסגמנט שמימין אלינו לסגמנט שלנו, וחסימה של הסגמנט שלנו לסגמנט השמאלי מאיתנו.
באירוע קודקוד תחתון, אנו צריכים להוסיף חסימה אחת,
של הקודקוד מימנו את הקודקוד שמשמאלינו.
אלגוריתם סוויף ליין עובד ב$O\left(n\log n\right)$ מאחר ויש לנו $O\left(n\right)$ אירועים.
כעת נריץ מיון טופולוגי, ונקבל את סדרת הפרדה.
(הרעיון הזה מופיע במאמר של Guibas-Yao 1983)
הכללה לפוליגון קמורים:
נסתכל עבור כל פוליגון קמור על הסגמנט שנוצר על ידי הקודקוד העליון והתחתון שלו.



ונשים לב שמה שסגמנט זה מטאטא זהה למה שהפוליגון מטאטא.
לכן האלגוריתם עבור פוליגון קמורים הוא למצוא את הסגמנטים המתאימים ולהפעיל את האלגוריתם הקודם.
סיבוכיות
$O\left(n\log n\right)$

טענה 0.2 בתלת מימד הדבר לא תמיד אפשרי