30/10/2017

הרצאה #2:

מרחבים תאיים:

הגדרה:

יהי X מ"ט האוסדורף (Hausdorff). מבנה תאי על X מכוח

$$X=\bigcup_{q=0}^{\infty}\bigcup_{i\in I_q} e_i^q \leftarrow \text{איחוד זר}$$

תא פתוח q מימדי $\quad I_0\neq\emptyset$

כך שלכל i,q קיימת $\varphi_i^q: D^q\longrightarrow X$ כך ש:

$$\varphi_i^q\big|_{Int(D^q)}: Int(D^q)\hookrightarrow e_i^q$$

הומאומורפיזם

ומתקיימות:

C) $\{$איחוד סופי של תאים ממימד $\geq q\} \supset \partial e_i^q=\bar{e}_i^q\setminus e_i^q$

W) $F\subset X$ סגורה $\iff$ $F\cap\bar{e}_i^q$ סגור ב- $\bar{e}_i^q$ $\forall i,q$.

תכונות טופולוגיות:

טענה 1:

טופולוגיית (W) היא הכי עדינה בין טופולוגיות שבהן כל העתקות φ_i^q רציפות.

להתעמק! בנוסחן ובתוכן

הוכחה:

נניח שנתון X, $X=\cup\cup e_i^q$, $\varphi_i^q: D^q\longrightarrow X$ רציפות. אם $F\subset X$ סגורה אזי $F\cap\bar{e}_i^q$ סגור ב- $\bar{e}_i^q$?

טענה:

$$\varphi_i^q(D^q)=\bar{e}_i^q$$

הוכחה:

D^q קומפקטי, ולכן $\varphi_i^q(D^q)$ קומפקטי $\Leftarrow$ $\varphi_i^q(D^q)$ סגורה ולכן $\bar{e}_i^q\subset\varphi_i^q(D^q)$. ומצד שני $D^q\supset\underbrace{(\varphi_i^q)^{-1}(\bar{e}_i^q)}_{\text{סגורה}}$

$$\underbrace{D^q\supset(\varphi_i^q)^{-1}(\bar{e}_i^q)}_{=}\supset(\varphi_i^q)^{-1}(e_i^q)=Int\, D^q$$

הגדרה:

X מרחב תאי, $A\subset X$ סגורה ונקראת תת מרחב תאי

אם A - איחוד של תאים שלמים.

דוגמאות:

1) X מ"ת, $\underset{\cup e_i^0}{X^0} \subset \underset{\cup e_i^0 \cup \cup e_i^1}{X^1} \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$

2) $e^0 \cup e^n = S^n = 2e^0 \cup 2e^1 \cup \dots \cup 2e^n$

(2 נקודות 1,2 ואז, 2 חצאי מעגל, ואז מוסיפים 2 חצאי ספירה)

3) $D^n = \underbrace{e^0 \cup e^{n-1}}_{S^{n-1}} \cup e^n$

4) $\mathbb{R}P^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$, $(x_0 : \dots : x_n)$

$(x_0 = \dots = x_{n-1} = 0,\ x_n \neq 0) = 1 \quad \dots \quad (x_0 = 0,\ x_1 \neq 0) \quad (x_0 \neq 0)$

5) $\mathbb{C}P^n = e^{2n} \cup e^{2n-2} \cup \dots \cup e^2 \cup e^0$

6) $\mathbb{R}^n =$

7) $S^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n = 2e^0 \cup 2e^1 \cup \dots \cup 2e^n \cup \dots$ (בנייה אינדוקטיבית)

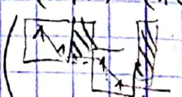
$D^\infty = ?$

8) $\mathbb{R}P^\infty = e^0 \cup e^1 \cup e^2 \cup \dots \cup e^n \cup \dots$

9) $\mathbb{C}P^\infty = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n} \cup \dots$

10) $Gr(k,n)$ מבנה תאי Schubert:

$L \in Gr(k,n) \dots A_{k\times n} \longrightarrow A^c_{k\times n}$ (

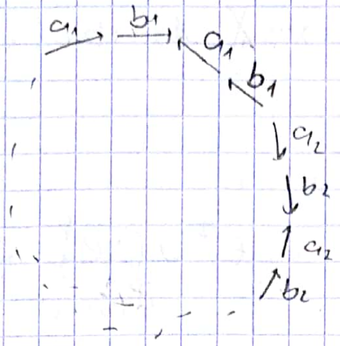


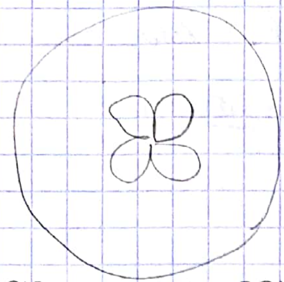
) (כלומר צורה מדורגת קנונית)

דיאגרמת Young

11) משטחים סגורים S^2.

א) חוג $4n$ צלעות:



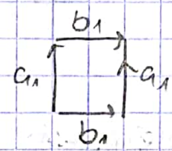


ספירה עם n חורים שמודבקים להם טורוסים

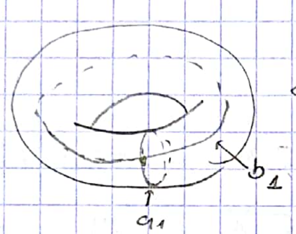
S^2_n הוא המנה $a_1 \mapsto a_1$, $b_1 \mapsto b_1$, ...

ומקבלים מבנה תאי של $e^2 \cup 2ne^1 \cup e^0$

דוגמה: $n=1$:

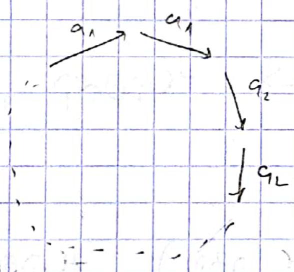


$\Leftarrow$



ב) $\underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2}_{n}$

$2n$ צלעות



דוגמה: $n=1$:

טענה 2:

(C), (W) בלתי תלויות.

הוכחה:

ניקח $X = D^2$ ונסתכל על שתי חלוקות:

1) $D^2 = Int(D^2) \cup \bigcup_{x\in S^1}\{x\}$ ברור שכאן (C) לא מתקיים. אבל ש- (W) כן מתקיים.

2) $D^2 = \{0\} \cup \underbrace{\bigcup_{x\in S^1}(0,x)}_{\text{רדיוסים}} \cup \bigcup_{x\in S^1}\{x\}$ ברור ש- (C) מתקיים. אבל (W) לא: לדוגמה:

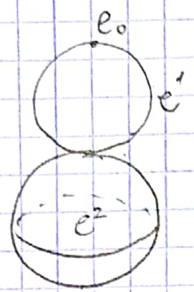
למה 3:

X מרחב תאי. אזי כל $x\in X$ נמצא בתת-מרחב תאי סופי $x\in A\subset X$.

הוכחה:

$$x\in e_i^q \subset \bar{e}_i^q \subset e_i^q \cup \underbrace{\bigcup_{p<q} e_j^p}_{\text{איחוד סופי}} \subset$$

$$\subset e_i^q \cup \Big(\underbrace{\bigcup_{p<q} \bar{e}_j^p}_{\text{איחוד סופי}}\Big) \subset \ldots \subset$$



(אילוסטרציה לתהליך המתואר)

נמשיך בתהליך אינדוקטיבי עד ש-$p=0$.

∎

משפט:

1) X מרחב תאי, $K\subset X$ קומפקטית, אזי קיים תת מרחב תאי סופי A $K\subset A\subset X$

למה זה נובע מ-1?
2) מרחב תאי קומפקטי $\iff$ הוא בעל מבנה תאי סופי.

הוכחה:

$K\subset X$ קומפקטי (נרצה להראות שהוא חותך רק מספר סופי של תאים ואז נקבל את A בתהליך אינדוקטיבי מהלמה הקודמת)
לכל תא e_i^q כך ש- $K\cap e_i^q\neq\emptyset$ נקח נקודה $x_i^q\in K\cap e_i^q$.
$y=\{x_i^q\}$. y סגורה, $y\cap \bar{e}_j^p$ סופי (ולכן בהכרח סגור)
לכל $Z\subset y$ סגורה (באותה הדרך) ולכן y דיסקרטית

מה זה אומר ש-y דיסקרטית?

ולכן y סופית.

∎

משפט:

כל מרחב תאי הינו נורמלי (לכל $F,G\subset X$ סגורות זרות, קיימות סביבות זרות $F\subset U$, $G\subset V$ כך ש- $U\cap V=\emptyset$)

הוכחה: (לא צריך ביסוס)

בונים את U,V באינדוקציה תאית. הכוונה: נסתכל על הפילטרציה:

$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$

פתוחות $U^0 \subset U^1 \subset \dots$

פתוחות $V^0 \subset V^1 \subset \dots$

כך ש: $F\cap X^n \subset U^n$ ו- $G\cap X^n \subset V^n$

ואז $U = \bigcup U^n$ ו- $V = \bigcup V^n$

<u>בסיס:</u>

$U^0 = F\cap X^0$, $V^0 = G\cap X^0$

<u>צעד:</u> ← להבין אותו

$U^n \supset F\cap X^n$, $V^n \supset G\cap X^n$, $U^n \cap V^n = \emptyset$

$$D^{n+1} \xrightarrow{\varphi^{n+1}} \underbrace{X^n \cup e^{n+1}}$$

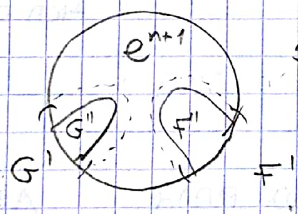
מהו מרחב הטוי

(כי הסגור של e^{n+1} מוכל ב- X^n)

$U' \supset F'$

$D^{n+1} \supset S^n \supset$

$V' \supset G'$



לוקחים את הסביבות הללו ואז דוחפים אותם לתוך $X^n\cup e^{n+1}$ (משתמשים בעובדה שכבר הוא נורמלי)

(מוכח בנייה לתא בודד e^{n+1})

<u>פעולות</u>: (מכפלה, מנה, גליל, קונוס, מתלה)

א) <u>מכפלה</u>:

X, Y מרחבים תאיים, אז $X\times Y$ מוגדרות 2 טופולוגיות:

טופולוגיות מכפלה, טופולוגיה תאית.

$X\times Y = \bigcup e_i^q \times \tilde{e}_j^s$.

מגדירים: $\overline{e_i^q \times \tilde{e}_j^s} = \bar{e}_i^q \times \bar{\tilde{e}}_j^s$ (C)

ונדרוש גם את (W).

למה:

טופולוגיה תאית היא גדולה מטופולוגית מכפלה.

הוכחה:

שאלה: יש רק טופולוגיה תאית 1?

נבדוק כי .כל $U\times V$ פתוחות הינו פתוחה בטופולוגיה תאית

$$(U\times V)\cap(\bar{e}_i^q\times \bar{e}_j^s) = (U\cap \bar{e}_i^q)\times(V\cap \bar{e}_j^s)$$

פתוח ב- $\bar{e}_i^q\times\bar{e}_j^s$

∎

משפט: (ללא הוכחה)

X,Y מרחבים תאיים ומתקיים אחד התנאים הבאים:

א) X,Y קומפקטים מקומית (= סופיים מקומית)

להבין מה זה אומר ולמה יש שקילות

ב) X,Y בעלי מבנה תאי. בן מנייה

אזי טופולוגיית מכפלה = טופולוגיה תאית.

מנה:

(X,A) אזי X/A גם מרחב תאי.

תת מרחב תאי ; מרחב תאי

גליל:

$X\times I = Cyl(X)$ - מרחב תאי (טבעי)

(וגם $Con(X)$, $S(X)$ (והתלה) הם מרחבים תאיים)

——— ∘ ———

הומוטופיה:

הגדרה: (הומוטופיה של העתקות)

X,Y מרחבים טופולוגיים. הומוטופיה:

$H: X\times I\longrightarrow Y$ רציפה

שאלה: מה כה משפיע רציפה?

$f_t: X\longrightarrow Y$

$f_t(x) = H(x,t)$

f_0, f_1 נקראות העתקות הומוטופיות ומסמנים $f_0 \overset{h}{\simeq} f_1$

דוגמה:

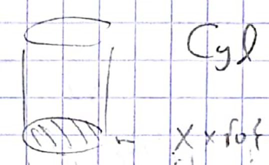
רטרקציה דפורמציונית:

(רטרקציה: $in: A \hookrightarrow X$, רטרקציה זו $r: X \to A$ כך ש:
$r \circ in = Id$ או $r|_A = Id$)

נתון $A \subset X$, קיימת הומוטופיה:
$f_t: X \to X$ כך ש- $f_0 = Id(X)$, $f_1 = (X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{in} X)$
וגם $f_t|_A = Id(A)$ לכל t.

דוגמאות של רטרקציה דפורמציונית:

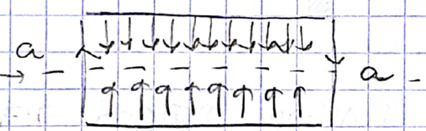
א) $Cyl(X) \supseteq X \times \{0\}$



$H: \underbrace{X \times I} \times I \longrightarrow \underbrace{X \times I}$

$H(x,t,s) = (x, t(1-s))$ (כיווץ חלקי)

ב) סרט Möbius:



זה הופך למעגל ומהווה רטרקציה.

ג) $Con(X)$ (קונוס):

$\{v\} \subset Con(X)$

מהווה רטרקציה דפורמציונית:

הסבר - ראינו קיימת עבור $Cyl(X)$ ואז לוקחים מנה (מדביקים) את הבסיס ואפשר לטשטש את זה כי $f_t|_{בסיס} = Id$)

הגדרה: (הומוטופיה יחסית):

$f_t: X \to Y$, $A \subset X$, $f_t|_A: A \to Y$ בלתי תלוי ב- t.

(מסמנים: $rel\ A$)

Scanned by CamScanner

טענה:

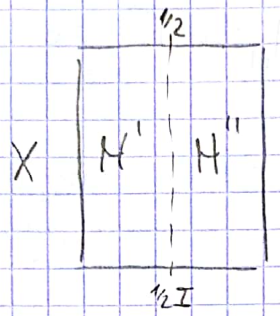
הומוטופיה זה יחס שקילות ב- $C(X,Y)$

הוכחה:

כל העתקה הומוטופית לעצמה: $H(x,t)=f(x)$ (רפלקסיביות)

סימטריה: $\tilde{H}(x,t)=H(x,1-t)$

טרנזיטיביות: $f_0 \overset{h}{\simeq} f_1 \overset{h}{\simeq} f_2$



$$H(x,t)=\begin{cases} H'(x,2t), & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ H''(x,2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$ רציפה.

■

כעת אפשר להגדיר מחלקות שקילות: $\pi(X,Y)$

$C(X\times Y,Z)=C(X,C($

תרגיל (מבוסס על משפט Case ← שנוסח)

טענה:

אם X Hausdorff וקומפקט מקומית, אזי $\pi(X,Y)$ קבוצת רכיבי קשירות מסילתית ב- $C(X,Y)$

מה זה רכיבי קשירות מסילתית?

הגדרה: (שקילות הומוטופית)

$f: X\to Y$ נקראת שקילות הומוטופית אם קיימת $g: Y\to X$ רציפה כך ש- $f\circ g: Y\to Y \simeq Id(Y)$

$g\circ f: X\to X \simeq Id(X)$

דוגמה:

מרחב שקול הומוטופית לרטרקט דפורמציה שלו.

$in: A\hookrightarrow X$, $r: X\to A$

$r\circ in = Id(A)$, $in\circ r = f_1 \simeq f_0 =$

$= Id(X)$