23/10/2017

יסודות בטופולוגיה אלגברית

http://www.math.tau.ac.il/~shustin/teaching.html — הרצאה 1:

ספר מומלץ: A. hatcher

תרגילים - אין חובת הגשה. (התרגילים הם בונוס)

20/12 - שוסטין בחו"ל.

תוכן:

1) מבוא - מרחבים טופולוגיים. מרחבים תאיים (CW - complexes)

2) הומוטופיה

3) Top $\Longrightarrow$ Groups, Rings, Modules, Complexes

$ob = \{$מרחבים טופולוגיים$\}$

$Mor(X,Y)$

חבורה יסודית $Top \Longrightarrow Gr$

4) הומולוגיה, קוהומולוגיות, סינגולריות, דואליות (Poincaré)

מרחבים טופולוגיים: דוגמאות, פעולות, מרחבים תאיים

1) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, D^n$ - כדור סגור $(r=1)$ = $\{x_1^2+\dots+x_n^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^n$ (קומפקטיות)

B^n - כדור פתוח = $\{x_1^2+\dots+x_n^2 < 1\}$, $\partial D^n = S^{n-1} = \{x_1^2+\dots+x_n^2=1\}$ (קומפקטיות)

2) $\mathbb{R}P^n = \{l \subset \mathbb{R}^{n+1}, 0 \in l\}$ (ישרים העוברים דרך הראשית)

קואורדינטות פרויקטיביות:

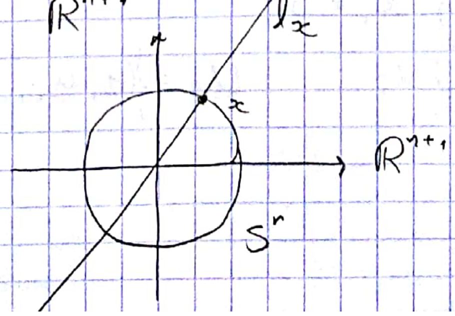
$p \in \mathbb{R}P^n \longleftrightarrow \overbrace{(x_0 : x_1 : \dots : x_n)}^{\neq 0} \sim (x_0' : \dots : x_n')$

קיימת שקילות אם $\forall i \le n.\ x_i' = \lambda x_i$, $\lambda \neq 0$.

מבנה העתקה:

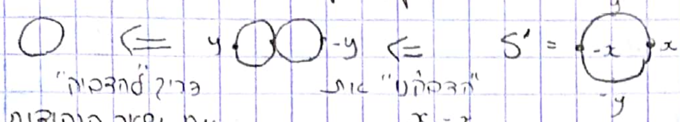
$$f : S^n \xrightarrow{2} \mathbb{R}P^n, \quad x \longmapsto l_x, \quad S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

* העתקה זו היא על, היא אינה חח"ע, אבל לכל איבר ב-$\mathbb{R}P^n$ יש בדיוק 2 מקורות.
* מהעתקה זו נובע ש-$\mathbb{R}P^n$ קומפקטי.



כאשר $n=0$: $S^0=\{-1,1\}$, $\mathbb{R}P^0=\{pt\}$.

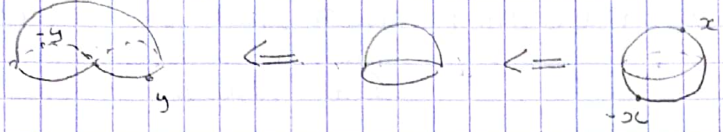
כאשר $n=1$: $S^1 = \ \Rightarrow \ \Rightarrow \ \mathbb{R}P^1 =$

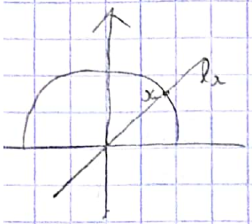


״הדבקנו״ את $x,-x$

צריך ״להדביק״ את שאר הנקודות האנטיפודליות.

כאשר $n=2$: $\Rightarrow \ \Rightarrow$





ישנה העתקה טבעית נוספת:

$$f: S^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$$
$$\uparrow \qquad \qquad \Vert$$
$$g: D^n \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$$

תחילה מסובבים את D^n שלנו לספירה העליונה ואז ההתאמה לישר טבעית (העתקה זו הינה חח״ע פרט לגבי ההצירה).

3) $\mathbb{C}P^n = \{\ell^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^{n+1}\}$.

לכל ישר $\ell^{\mathbb{C}} \subseteq \mathbb{C}P^n$ אפשר להתאים קואורדינטות פרויקטיביות:

$\{(x_0:\dots:x_n)\}$.

$\mathbb{C}P^0=\{pt\}$ (כל הנקודות השונות מאפס שקולות)

$\mathbb{C}P^1 = S^2$. $(x_0:x_1)$

אם $x_0=0$: $(0:x_1)=(0:1)$

אם $x_0\neq 0$ אז מה שקובע: $(1:x)$, $x\in\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$

$(\mathbb{C}^{n+1}\cong\mathbb{R}^{2n+2})$ $\quad S^{2n+1} \twoheadrightarrow \mathbb{C}P^n$

$\quad x \longmapsto l_x$

לכל $x\in S^{2n+1}$ נרשום את הישר שמחבר אותו לראשית, אבל ישר מרוכב הינו בעצם מישור. ולכן המקור של $l_x\in \mathbb{C}P^n$ הינו בעצם מעגל.

*נובע מכאן ישר כי $\mathbb{C}P^n$ מרחב קומפקטי.

נחלק את $\mathbb{C}P^n$, $(x_0:\dots:x_n)$ לקבוצות:

$$U_i=\{x_i\neq 0\}$$
$$\mathbb{C}P^n=\bigcup_{i=0}^{n} U_i \quad , \quad U_0=\{(1,y_1,\dots,y_n)\}\cong\mathbb{C}^n$$

תיאור העתקה נוספת: $\mathbb{C}^{n+1} \supset S^{2n+1} \supset D^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$

$$\underbrace{\left(\sqrt{1-|z_1|^2-\dots-|z_n|^2}, z_1,\dots,z_n\right)}_{x}$$

$$x \longmapsto l_x$$

העתקה זו חח"ע כל עוד $|z_1|^2+\dots+|z_n|^2<1$

4) יריעות Grassmann

$Gr(n,k) = \{L^k \subset \mathbb{R}^n\}, k<n$ (תתי מרחבים ממימד k)

$\mathbb{C}Gr(n,k) = \{L^k_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n\}, k<n$ (תתי מרחבים מרוכבים ממימד k)

יריעות חלקות קומפקטיות ממימד $k(n-k)$:

רעיון: $k\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}}_{n}\right.$ ממימד k ולכן קיים מינור $k\times k$ הפיך

נשנה בסיס כך שנקבל $k\left\{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & \star \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)\right.$ עם $\underbrace{\quad}_{k}$ ו-$\underbrace{\quad}_{n-k}$

(נסביר למה אלו יריעות קומפקטיות:)

$$Gr(n,k) \hookrightarrow \mathbb{R}P^{N=\binom{n}{k}-1}$$

$$Gr(n,k) \hookrightarrow \mathbb{C}P^{N}$$

(נתאר את ההעתקה:)

$$L^k \rightsquigarrow A_{k\times n} \longmapsto \left(\begin{array}{c}\text{כל המינורים } k\times k \\ \text{מתוך } A \\ \pi_{i_1,\dots,i_k} \ 1\le i_1<\dots<i_k\le n\end{array}\right) \Big/ \sim$$

ואז לוקחים מכל מינור דטרמיננטה.

תמונה: תת קבוצה אלגברית (שאפשר לתאר ע"י אוסף משוואות)

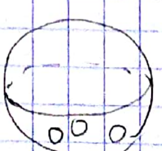
5) יריעות חד-מימדיות:

 S_1 · קומפקטית · $\mathbb{R}$ · לא קומפקטית

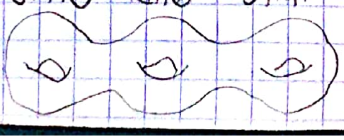
 , - (אבל עם שפה)

יריעות דו-מימדיות: (ללא שפה, סגורות, קומפקטיות)

א) S^2, $T^2=S^1\times S^1$, S^2_g גוזרים g חורים ולכל חור מדביקים "ידית" שהיא טורוס

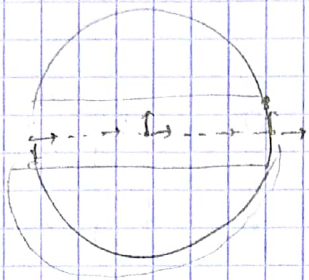


טורוס: 

ומקבלים: 

דרך לקבוע אוריינטציה - להגדיר מרחב משיק ועל המרחב המשיק לקבוע בסיס $e_1, e_2, \ldots$. וכמו האוריינטציה (אם הדטרמיננטה של מטריצת המעבר הוא 1 האוריינטציה חיובית ואם -1 - אוריינטציה שלילית).

ב) $\mathbb{R}P^2$. - זוהי יריעה לא אוריינטבילית:



האוריינטציה התהפכה כשהחלפנו צד,

$$D^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$$

גם מה $\longleftarrow$ $\underbrace{\mathbb{R}P^2 \# \ldots \# \mathbb{R}P^2}_{g}$

* אפשר למצוא הוכחה למיון היריעות הדו מימדיות בספר של Massey, Stalings

6) $\mathbb{R}^\infty$, $\mathbb{C}^\infty$, S^∞ , D^∞ , $\mathbb{R}P^\infty$, $\mathbb{C}P^\infty$

הגדרה: א) $\mathbb{R}^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \ldots$

$x_1 \mapsto (x_1, 0)$

$(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, 0)$

נגדיר את הטופולוגיה על $\mathbb{R}^\infty$:

$U \subset \mathbb{R}^\infty$ פתוחה (סגורה) אם"ם $\forall n \geq 1$ $U \cap \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה (סגורה)

$\mathbb{R}^\infty$ הוא אוסף הסדרות האינסופיות כך שממקום מסוים הסדרה מתאפסת

הגדרה: באופן דומה נגדיר את $\mathbb{C}^\infty := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}^n$

הגדרה: $\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = \{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots = 1\} = S^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$

הגדרה: $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^\infty = \{ l \subset \mathbb{R}^\infty \}$

הגדרה: $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^\infty = \{ l_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^\infty \}$

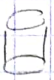
פעולות עם מרחבים טופולוגיים

א) גבול אינדוקטיבי: $X = \lim_{n\to\infty} X_n$. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ חשוב שמה תהיה

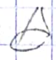
קבוצה עולה, כלומר $X_1 \subset X_2 \subset \dots$

$U \subset X$ קבוצה פתוחה (סגורה) אמ"מ $U\cap X_n \subset X_n$ פתוחה (סגורה)

ב) מכפלה: משפט טיכונוף

דוגמא: גליל $Cyl(X) = X \times I$, $I = [0,1]$ 

ג) מנה:

דוגמאות: קונוס $Con(X) =$  $= Cyl(X)/_{(x,1)\sim(x',1)\ \forall x,x'\in X}$ מתקבלים בסיס עליון לנקודה 1.

מתלה: (Suspension)  $= S(X) = Cyl(X)/_{(x,1)\sim(x',1),\ (y,0)\sim(y',0)}$

ד) הדבקה לאורך העתקה: X, Y , $A \subset X$ ($\amalg$ - איחוד זר)

$f: A \to Y$

$$X \amalg_f Y = X \amalg Y /_{x\in A \sim f(x)\in Y}$$

מתקבלת כך, אם נרצה לבנות העתקה רציפה מ- $X\amalg_f Y$ ל- Z

אז אפשר לבנות העתקות:

$$X\amalg_f Y \xrightarrow{g} Z,\quad x \in A \subset X \xrightarrow{g_1} Z,\quad Y \xrightarrow{g_2} Z$$

שמקיימות את התנאי $\forall x\in A,\ g_1(x) = g_2(f(x))$

וכן נקבל העתקה g רציפה.

ה) העתקות:

מתבוננים ב- X,Y מרחבים טופולוגיים, ומגדירים מרחב העתקות:

$$C(X,Y) = \{f: X \to Y\}$$

מהי טופולוגיה קומפקטית פתוחה ← מה זה?

<u>משפט:</u>

נניח ש- X,Y מרחבי האוסדורף, קומפקטים מקומית (לכל נקודה קיימת סביבה עם סגור קומפקטי) ו- Z כללי.

אזי:
$$C(X, C(Y,Z)) = C(X\times Y, Z)$$
$$x \to f_x(y) \qquad f(x,y)$$

<u>מרחב מנוקד:</u>

(X, x_0) - מרחב טופולוגי ונקודה מסוימת בתוכו.

כל הפעולות שהגדרנו לפני כן עוברות אוטומטית למרחבים מנוקדים:
$$f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$$
$$f(x_0)=y_0$$
$$(X,x_0)\times(Y,y_0) = (X\times Y,(x_0,y_0))$$

עם זאת יש פעולה נוספת. דוגמה:

$S(X,x_0) \to X\times I \to$  (x_0,t) $\to S(X)/_{(x_0,t)\sim(x_0,t')}$ $\tilde{x}_0$

$$C((X,x_0),(Y,y_0))$$
$$f_0: X\to y_0$$

<u>זוג:</u> (X,A) מרחב טופולוגי ותת מרחב $A\subset X$ (מרחב מנוקד הוא מקרה פרטי)
$$f:(X,A)\to(Y,B)$$
$$f|_A: A\to B$$

<u>שלישיה:</u> (X,A,B)

<u>שלישיה מסודרת:</u> (X,A,B) $X\supset A\supset B$