24/10/18

הרצאה 2

2. אלגברה חילופית

2.1 – מיקום (לוקליזציה)

יהי B חוג (חילופי, עם יחידה). נאמר ש-B הוא **תחום שלמות** (או בקצרה – תחום) אם: אין בו מחלקי אפס, וגם $1 \neq 0$. נאמר ש-$S \subseteq B$ היא **קבוצה כפלית** אם לכל $s,t \in S$, $st \in S$ וגם $0 \notin S$.

בנוסף, ניתן להניח $1 \in S$ (אם לא, מוסיפים אותו).

~~יהי A B~~

טענה: יהי B תחום ותהי S קבוצה כפלית. יש חוג, B_S, ושיכון $i: B \hookrightarrow B_S$, כך ש:

1) $i(s) \in B_S$ הפיך לכל $s \in S$.

2) B_S "מינימלי" ביחס לתכונה זו. כלומר, לכל חוג T עם הומומורפיזם $\varphi: B \to T$ כך ש-$\varphi(s) \in T$ הפיך לכל $s \in S$, קיים ויחיד $\psi: B_S \to T$ שהדיאגרמה הבאה חילופית: – (תכונה אוניברסלית של לוקליזציה)

$$B \xrightarrow{i} B_S$$
$$\varphi \searrow \quad \swarrow \exists! \psi$$

הגדרה: נגדיר על הזוגות $\{(r,s) : r\in B, s\in S\}$ יחס שקילות,

$$(r_1,s_1)\sim(r_2,s_2) \iff \frac{r_1}{s_1}=\frac{r_2}{s_2} \iff r_1 s_2=r_2 s_1$$

זה יחס שקילות. נסמן ב- B_S את קבוצת מחלקות השקילות תחת היחס.
נסמן $i: B\to B_S$, $r\mapsto r/1$, ונגדיר חיבור וכפל כרגיל. זה מוכיח את 1.

עבור 2, יהי $\varphi: B\to T$ כמו ב-2. נגדיר -

$$\Psi\left(\frac{r}{s}\right)=\varphi(r)\varphi(s)^{-1}$$

צריך שתהיה שלא תלוי בנציגים של זוגות. □

החוג B_S נקרא המיקום של B ב-S.

דוגמה: ① שדה המנות של B - $\mathrm{Frac}(B)$ - מוגדר להיות המוקלציה של B ב- $B\setminus\{0\}$. נשים לב שזהו אכן שדה, המינימלי שמכיל את B.

② מיקום באיבר - ניקח $0\neq f\in B$, ונסמן ב- $S=\{1,f,f^2,\dots\}$.
נסמן -

$$B_f := B_S = \left\{\frac{r}{f^i} : r\in B, i\geq 0\right\}$$

③ ניקח $B=\mathbb{Z}$ ונבחר $p\in\mathbb{Z}$ ראשוני. נסמן -

$$S=\{a \mid p\nmid a\}$$

זו קבוצה כפלית - מהגדרת הראשוניות. נסמן -

$$(\mathbb{Z}_S=)\ \mathbb{Z}_{(p)} := \left\{\frac{a}{b} : p\nmid b\right\}$$

[יש פה בעיה בסימון - חייבים להתמודד איתה.]

מיקום ספקטרום

נאמר ש- $p\subseteq B$ אידאל ראשוני, כאשר הוא אידאל עם המקיים שלכל $a,b\in B$, אם $ab\in P$ אז $a\in P$ או $b\in P$.

דוגמה: $(p)\subseteq\mathbb{Z}$ - אידאל ראשוני.

הגדרה: הספקטרום של חוג B הוא - $\operatorname{spec}(B)=\{p\triangleleft B \mid p \text{ ראשוני}\}$.

למשל, $\operatorname{spec}(\mathbb{Z})=\{(0),(2),(3),\dots\}$.

דוגמה נוספת -

$$\operatorname{spec}(\mathbb{C}[X])=\{(X-\alpha)\mid\alpha\in\mathbb{C}\}\cup\{0\} \quad (\text{"}\cong \mathbb{C}\cup\{0\}\text{"})$$

ההתאמה $\underset{\text{(חוגים)}}{B}\mapsto \underset{\text{(קבוצות)}}{\operatorname{spec}B}$ היא פונקטור - מוחלף גם למורפיזמים. כלומר אם יש העתקה $\varphi: R\to S$ אז יש העתקה משרה $\varphi^*: \operatorname{spec}S\to\operatorname{spec}R$ לפי $p\in\operatorname{spec}S\mapsto \varphi^{-1}(p)\in\operatorname{spec}R$

צריך להסביר למה $\varphi^{-1}(p)$ ראשוני (עוד רגע). מגדיר
פונקטור בין חוגים לקבוצות/מרחבים טופולוגיים/סכימות.

<u>למה:</u> אכן $\varphi^{-1}(p)\in\operatorname{Spec}R$.

<u>הוכחה:</u> $\varphi^{-1}(p)=\mathfrak{P}$ - אידיאל. $\mathfrak{P}$ נאות, שכן אם $1\in\mathfrak{P}$, אזי $\varphi(1)=1\in p \Rightarrow p$ לא ראשוני. לבסוף, נראה שהוא ראשוני:
אם $a,b\in R$ כך ש-$ab\in\mathfrak{P}$. אזי $\varphi(ab)\in p$ ולכן $\varphi(a)\in p$ או $\varphi(b)\in p$ ולכן $a\in\mathfrak{P}$ או $b\in\mathfrak{P}$.

<u>הגדרה:</u> בהינתן הומומורפיזם $\varphi: R\to S$ נאמר ש-$\mathfrak{P}\in\operatorname{Spec}S$ נמצא <u>מעל</u> $p\in\operatorname{Spec}R$ אם $\varphi^*(\mathfrak{P})=p$.

בפרט אם R,S, φ השיכון, אז $\mathfrak{P}$ נמצא מעל p אמ"מ $p=\mathfrak{P}\cap R$.

<u>טענה:</u> יהי R חוג ותהי S קבוצה כפלית. תהי $i: R\to R_S$ העתקת השיכון למיקום ב-S. אזי $i^*: \operatorname{Spec}(R_S)\to\operatorname{Spec}(R)$, i^* משרה איזומורפיזם -

$$i^*: \operatorname{Spec}(R_S) \xrightarrow{\sim} \{p\in\operatorname{Spec}R : p\cap S=\emptyset\}$$

כלומר,

$$\mathfrak{P}\in\operatorname{Spec}R_S \overset{i^*}{\longmapsto} \mathfrak{P}\cap R\in\operatorname{Spec}R$$

$$\mathfrak{P}R_S \overset{``i^{*-1}"}{\longleftarrow\!\shortmid} \mathfrak{P}\in\operatorname{Spec}R,\ \mathfrak{P}\cap S=\emptyset.$$

<u>הוכחה:</u> נראה שאלו העתקות הפכיות אחת לשניה -
*כיוון 1 - ניקח $p\in\operatorname{Spec}R$. צריך להראות: 1. pR_S - אידיאל ראשוני 2. $p=(pR_S)\cap R$

~~ואכן, pR_S [illegible]~~

ואכן נתבונן בהעתקה -

$$R\longrightarrow R/p\longrightarrow (R/p)_{\bar S}$$

כאשר $\bar S=\{a \bmod p : a\in S\}$. מההנחה, $p\cap S=\emptyset$, נקבל $0\notin\bar S$, ונזכור ש-$\bar S$ כפלית. מהתכונה האוניברסלית, יש העתקה -

$$\psi: R_S\longrightarrow (R/p)_{\bar S}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\gamma"'] & R_S \arrow[d, "\psi"] \\ & (R/p)_S \end{tikzcd}$$

כיוון ש- $(B/p)_{\bar S}$ נוצר ע"י התמונה של φ וגם $\{\frac{1}{\bar s} \mid s\in S\}$ נובע ש- ψ על.
לכן הגרעין של ψ הוא אידיאל ראשוני (ולכן. כמו כן,

$$\ker\varphi = i^{-1}(\ker\psi)$$

(נשאר לחשב את $\ker\psi$:

$$\ker\psi = \{\tfrac{x}{s}\in B_S \mid \varphi(x)\varphi(s)^{-1}=0\} = \{\tfrac{x}{s}\in B_S \mid \varphi(x)=0\} = pB_S$$

לסיכום, הראינו ש- pB_S אידיאל ראשוני כגרעין של ψ, וש- $p=i^{-1}(pB_S)=pB_S\cap B$.
בכיוון השני, ניקח $\beta\in \operatorname{spec}B_S$. נסמן $p=\beta\cap B\in\operatorname{spec}B$, שכן אידיאל ראשוני. נותר להראות ש- $pB_S=\beta$. ברור ש- $pB_S\subseteq\beta$. ניקח $\frac{x}{s}\in\beta$. אז $s\cdot\frac{x}{s}\in\beta$. לכן, $x\in\beta$. $x\in B$ גם ולכן $x\in\beta\cap B=p$. ולכן, $\frac{x}{s}\in pB_S$. (נשאר להראות ש- $p\cap S=\varnothing$: ולכן אילו היה $s\in p$ אז כיוון ש- s הפיך ב- B_S, נקבל ש- $\beta=B_S$ - סתירה. □

נהוג לזהות את הראשוניים של B שזרים ל- S עם הראשוניים של B_S.
דוגמה: $2\in\mathbb{Z}$ ראשוני, וגם $2\mathbb{Z}$ ראשוני. גם ב- $(2\mathbb{Z})_{\{1,3,-3\}}$ - קורה ראשוני.

<u>מיקום באידיאלים ראשוניים</u>

יהי $p\subseteq B$ אידיאל ראשוני. $S=B\setminus p$ היא קבוצה כפלית. נסמן את המיקום ב- S ע"י B_p. (למרות הסימון המבלבל) נאמר ש- B_p הוא המיקום של B ב- p.
<u>טענה:</u> אם p אידיאל ראשוני של תחום שלם B, אז pB_p הוא אידיאל מקסימלי ב- B_p. (בפרט) אין אחרים)

<u>הוכחה:</u> יהי Q מקסימלי ב- B_S. אז $Q\cap B$ זר ל- $B\setminus P$ כלומר $Q\cap B\subseteq P$. לכן $Q=(Q\cap B)B_S\subseteq PB_S$ ומהמקסימליות יש שוויון. □

דוגמה: $f\in K[x]$ אי פריק. האידאל (f) - ראשוני. אם נתבונן ב- $K[x]_{(f)} = \{\frac{h}{g} : f\nmid g\}$. האידאלים הראשוניים הם $0 \subseteq (f)$.

דוגמה: נתבונן ב-$K[x,y]$. יש שרשרת אידאלים ראשוניים,

$$0 \subseteq (x) \subseteq (x,y)$$

$$K[x,y]_{(x,y)} \to 0 \subseteq (x)K[x,y]_{(x,y)} \subseteq (x,y)K[x,y]_{(x,y)}$$

חוגים מקומיים (Local Rings)

הגדרה: חוג R שיש לו אידאל מקסימלי יחיד נקרא חוג מקומי. נסמן לפעמים (חוג מקומי) כ-(R,m).

כמובן ש-(R_p, p) - תמיד מקומי.

טענה: אם (R,m) מקומי אזי $R^\times = R\setminus m$.

הוכחה: אם נניח $x\in R\setminus m$ אז x הפיך כי אחרת יש אידאל מקסימלי m', $x\in m'$, ולכן בהכרח $m'\neq m$ וזה לא ייתכן. להיפך, m אידאל של לכן $R^\times \subseteq R\setminus m$. □

טענה: יהי (R,m) חוג מקומי, ויהי M מודול נוצר סופית. אם $mM = M$ אז $M=0$.

הוכחה: ניקח $a_1,\dots,a_n\in M$ קבוצת יוצרים מינימלית. ניקח $x\in M$. $M=mM$ לכן ניתן לכתוב -

$$x=\alpha_1 a_1+\dots+\alpha_n a_n, \quad \alpha_i\in m.$$

בפרט ניקח $x=a_1$. נקבל -

$$(1-\alpha_1)a_1 = \alpha_2 a_2+\dots+\alpha_n a_n$$

כיוון ש-$\alpha_1\in m$ נקבל $1-\alpha_1\notin m$. לכן $1-\alpha_1$ - הפיך. נקבל -

$$a_1 = \alpha_2' a_2 + \dots + \alpha_n' a_n$$

והקב' אינה מינימלית.

טענה: (הלמה של נקאיימה)

יהי (R,m) חוג מקומי ויהיו $L\subseteq M$ מודולים מעל R נ"ס. $L+mM=M$ אזי $L=M$.

הוכחה: נסתכל מודולו 2 ונפעיל את הלמה הקודמת. □

2.2 - הרחבות שלמות של חוגים

נניח ש- $B\subseteq S'$ ושה- $\phi: B\hookrightarrow S$ העתק השיכון (במילים אחרות אפשר לקחת φ הומומורפיזם כללי). נאמר ש- $s\in S'$ הוא <u>שלם</u> מעל B אם קיים פולינום מתוקן $f(x)\in B[x]$ כך ש- $f(s)=0$.

<u>דוגמה:</u> 2 שלם מעל $\mathbb{Z}$, כי הוא מקיים את המשוואה $x-2=0$ אבל $1/2$ לא שלם (נעזר במשפט השורשים הרציונליים).

<u>דוגמה:</u> נתבונן ב- $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. $\sqrt{5}$ שלם כי מקיים x^2-5. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ לא שלם! כי הפולינום המינימלי $4x^2-5=0$. אבל $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ מקיים $x^2-x-1=0$.

פולינום מתוקן $f(x)=x^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$ עם $a_i\in B$ כך ש- $f(s)=0$ נקרא תלות שלמה.

נאמר ש- B/S הרחבה שלמה אם כל $s\in S$ שלם מעל B.

<u>טענה:</u> תהי B/S הרחבת חוגים ($B\subseteq S$). התנאים הבאים שקולים עבור $s\in S$ שלם מעל B -
1) $B[s]$ נ"ס כמודול מעל B.
2) $B[s]$ מוכל בתת חוג $B\subseteq S$ כך ש- B נ"ס כ- B-מודול.
3) קיים $B[s]$-מודול, שנסמנו M, נ"ס כ- B-מודול וגם האיבר היחיד ב- $B[s]$, y, כך ש- $yM=0$ - הוא 0.

<u>הוכחה:</u>
שלמות $\Leftarrow$ 1) - אם $s\in S$ שלם אז יש משוואה -

$$s^n=-a_{n-1}s^{n-1}-\dots-a_0$$

$\Rightarrow \{1,s,\dots,s^{n-1}\}$ - יוצרים את s^n

$\Rightarrow$ וגם יוצרים ב- S, כל את s^k עבור $k\geq 0$.

$\Rightarrow$ $B[s]$ נוצר ע"י $\{1,\dots,s^{n-1}\}$ כ- B-מודול

1) $\Leftarrow$ 2) - ברור

2) ⇐ 3) - ברור, כי $M=B$. (נשים לב ש- $1\in B$. לכן, אם $yB=0$ אז בפרט $y=0$ ...)

3) ⇐ 1) - נניח ש- $x_1,\dots,x_n\in M$ יוצרים. (מעל B)

נכתוב -

$$\underset{\in M}{S\cdot x_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

נסמן -

$$A = I_S - (a_{ij})$$

ונסמן -

$$d = \det A$$

מהלמה שראינו, $dM=0$.

כי:

$$\begin{pmatrix} d x_1 \\ d x_2 \\ \vdots \\ d x_n \end{pmatrix} = \det A\cdot I\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{adj}(A)\cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \operatorname{adj}(A)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכאן נובע ש- $d=0$. אבל d יהיה פולינום מתוקן ב- S עם מקדמים ב- B ⇐ S שלם.