1/5/19

הרצאה 8

<u>תזכורת:</u> רוצים להוכיח את משפט צ'בוטרב - L/K הרחבה גלואה של שדות מספרים עם $G=Gal(L/K)$. יש $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)\in C$ מתפלגים באופן אחיד במובן הבא -

$$\#\{\mathfrak{p}\in P(K) \mid \left(\tfrac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)\in C,\ N\mathfrak{p}\leq x\} = \frac{|C|}{|G|}\cdot\frac{x}{\log x}\left(1+o(1)\right)$$

לכל מחלקת צמידות C.

מקרה פרטי $(L=K)$ -

$$\#\{\mathfrak{p}\in P(K) \mid N\mathfrak{p}\leq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

זהו משפט המספרים הראשוניים של דדקינד.

התחלנו לחקור טורי דיריכלה -

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

הוכחנו -

<u>משפט:</u> אם $\alpha=\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{N} a_n}{N}=\lim_{N\to\infty}\frac{S(N)}{N}$ קיים וסופי אזי $f(s)$ אנליטית ב- $Re(s)>1$ עם קוטב פשוט ב- $s=1$, עם שארית α.

הגדרנו

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}\subseteq\mathcal{O}_K} N\mathfrak{a}^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

כאשר

$$a_n=\#\{\mathfrak{a} \mid N\mathfrak{a}=n\}=a_n$$
$$S_K(N)=\#\{\mathfrak{a} \mid N\mathfrak{a}\leq N\}$$

ניקח $\mathfrak{m}=\underbrace{\mathfrak{m}_0}_{\text{ראשוניים סופיים}}\underbrace{\mathfrak{m}_\infty}_{\text{אינסופיים}}$ מודולוס. ואז יש לנו את חבורת מחלקות הקרן $C_K^{\mathfrak{m}}$ - סופית -

ניקח $K\in C_K^{\mathfrak{m}}$ ונגדיר

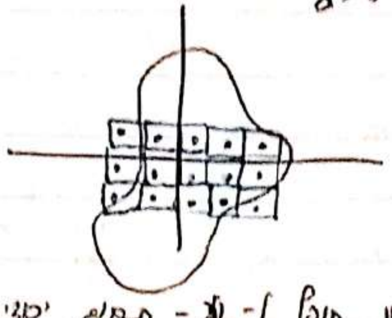
$$\zeta_K(s;K)=\sum_{\mathfrak{a}\in K} N\mathfrak{a}^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty} a(n,K)\,n^{-s}$$
$$a(n,K)=\#\{\mathfrak{a}\in K \mid N\mathfrak{a}=n\}$$

כדי לקבל תמונה אסימפטוטית של $\zeta_K(s;K)$ צריך להעריך את

$$S(n,K)=\#\{\mathfrak{a} \mid N\mathfrak{a}\leq n,\ \mathfrak{a}\in K\}$$

נשתמש בגיאומטריה של מספרים להעריך זאת. ניקח $V=\mathbb{R}^d$, $\Gamma\subseteq V$ קבוצה סגורה "נחמדה". ניקח סריג מלא $L\subseteq V$ ונסמן $\lambda L=\{\lambda a \mid a\in L\}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, ושם הזזה $L_h=L+h$, $h\in V$. ניתן לחשב את הנפח של Γ בצורה הבאה -

יהי $\gamma > 0$



סריג L עם כרך נשיג מקבילון חוסם ל-Ω - תחום יסודי מעט.
נסמן -

$$T_1(\gamma) = \#\{\lambda \in \gamma L \mid \text{מקבילון מוכל ב-}\Gamma\}$$
$$T_2(\gamma) = \#\{\lambda \in \gamma L \mid \text{מקבילון חותך את }\Gamma\}$$
$$T(\gamma) = \#(\gamma L \cap \Gamma)$$

מתקיים האי"ש הבא -

$$T_1(\gamma)\gamma^d Vol(L) \le Vol(\Gamma) \le T_2(\gamma)\gamma^d Vol(L)$$
$$T(\gamma)\gamma^d Vol(L)$$

כאשר $\gamma \to 0$ הא"ש המסביב לשוויונות. נסמן $t = \gamma^{-1}$, $N(t) = T(\gamma^{-1})$. קיבלנו:

<u>למה:</u> תהי Γ תחום סגור, חסום ונמדד ב-V. אז

$$Vol(\Gamma) = Vol(L) \underbrace{\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t^d}}_{\text{דוגמה שבה יהיה } S(n,H)}$$

כדי לחשב את השארית של $\zeta_K(s,H)$, ננסה את $\lim_{t\to\infty} N(t)/t^d$ עם $\lim_{n\to\infty} \frac{S(n,H)}{n}$, ואת הנפחים נחשב עם אינטגרל.

<u>למה:</u> כל $H \in C_K^m$ מכילה אידאל שלם.

<u>הוכחה:</u> נבחר $b \in H$ אידאל שבר. נרשום $b = \sigma \cdot c^{-1}$ עם c, σ שלמים.
כיוון ש-C_K^m סופית, אז $c^v \sim 1$ עבור איזשהו טבעי v. מכיון,
$b \sim \sigma \cdot c^{-1} \sim \sigma \cdot c^{v-1}$ כנדרש. ∎

מעכשיו נקבע $c \in H^{-1}$ שלם ואז לכל $\sigma \in H$ שלם, מתקיים $\sigma c = (\alpha)$, עבור $\alpha \in K_{m,1} \cap c$, עבור איזשהו α כנ"ל.

<u>למה:</u> ההעתקה $(\alpha) = \sigma c \mapsto \sigma$ היא התאמה בין אידאלים שלמים $\sigma \in H$ עם $N\sigma \le n$ ובין אידאלים ראשיים (α) עם $\alpha \in c \cap K_{m,1}$ עם $N(\alpha) \le n \cdot Nc$. בפרט,

$$\#\{(\alpha) \mid \alpha \in c \cap K_{m,1},\ N_\alpha \le n \cdot N_c\} = S(n,H)$$

הוכחה: ההעתקה ההפוכה היא

$$(\alpha) \longmapsto (\alpha)\cdot \mathfrak{c}^{-1}$$

ומכפילית כנורמה,

$$N(\alpha) = N\alpha_0 \cdot N\mathfrak{c} \qquad \square$$

נבחר $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\mathfrak{m}_\infty$, $\mathfrak{c}$ זר ל-$\mathfrak{m}_0$. אז יש $\alpha_0 \in \mathfrak{c}$ כך ש-$\alpha_0 \equiv^* 1 (\mathfrak{m})$.

למה: $S(\mathfrak{u}, H)$ שווה למספר האידיאלים הראשיים (α), כך ש-

1) $\alpha-\alpha_0 \in \mathfrak{m}_0\mathfrak{c}$

2) $\alpha \equiv^* 1 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_\infty)$

3) $N\alpha \leq n N\mathfrak{c}$

הוכחה: ① שקול לכך ש- $\alpha \in \mathfrak{c}$, $\alpha \equiv^* 1 (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_0)$. ביחד עם ② זה שקול לכך ש- $\alpha \in K_{\mathfrak{m},1} \cap \mathfrak{c}$. $\square$

נשים קואורדינטות: ניקח $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ בסיס-$\mathbb{Z}$ של $\mathfrak{m}_0\mathfrak{c}$. כאן $d=[K:\mathbb{Q}]$. α מקיים את ① $\Leftrightarrow$ $\alpha=\alpha_0+\sum_{i=1}^{d} k_i\alpha_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$. ניקח $\underline{h} \in \mathbb{Q}^d$ כך ש- $\alpha_0=\sum h_i\alpha_i$. נסמן

$$L = \mathbb{Z}^d \subseteq \mathbb{R}^d$$

וגם - $L_{\underline{h}} = L + \underline{h}$ - ההזזה ב-$\underline{h}$

אז

$$\mu: \mathbb{R}^d \longrightarrow K$$
$$\mu(x_1, \dots, x_d) = \sum x_i\alpha_i$$

שולח באופן מסוים את L_h ל-α-ים שמקיימים את ①.

נסמן ב-

$$v: K \longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$$
$$v(x) = (\underbrace{\sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)}_{\text{שיכונים ממשיים}}, \underbrace{\sigma_{r+1}(x), \dots, \sigma_{r+s}(x)}_{\text{נציג לשיכונים מרוכבים}})$$

ונגדיר

$$N: \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$N(v_1, \dots, v_s) = |v_1|\cdot \ldots \cdot|v_r|\cdot |v_{r+1}|^2 \cdot \ldots \cdot |v_{r+s}|^2$$

שמקיים שלכל $x \in K$,

$$N(\alpha) = N(v(\alpha))$$

למה: יהיו $x,y \in L_h$. נאמר ששניהם שקולים אם $(\mu(x))=(\mu(y))$. אזי, $S(\mathfrak{u},H)$ שווה למספר מחלקות השקילות המכילות $x \in L_h$ כך ש-

① הקואורדינטה ה-i של $v(\mu(x))$ חיובית אם σ_i שיכון ממשי שמופיע ב-$\mathfrak{m}_\infty$.

② $0 < N(v(\mu(x))) \leq n N\mathfrak{c}$

הערה: כמו המשפט פירוש של יחידה קוואדרטית. □

איך מוצאים כאלה? אז $\alpha = u\cdot\alpha$, $\beta = u\cdot\gamma$, וכן $(\beta) = (\alpha)$, ל-$\mathcal{L}_K$-יוצר.
המקיימים את ① ו-②, u

$$\alpha = p\cdot u$$

עבור u הפיך p ו-$u \in K_{\mathfrak{m},1}$. ת״כ לדון בחבורת היחידות $\mathcal{O}_K^* \cap K_{\mathfrak{m},1}$.

מה יודעים על $\mathcal{O}_K^*$?

יש פונקציה

$$l : \mathcal{O}_K^* \longrightarrow \mathbb{R}^{r+s}$$
$$l(x) = (l_i(x))_{i=1}^{r+s}$$
$$l_i(x) = \begin{cases} \log|\sigma_i(x)| & \sigma_i \text{ ממשי} \\ 2\log|\sigma_i(x)| & \sigma_i \text{ מרוכב} \end{cases}$$

משפט: (משפט היחידות של דיריכלה)

$l(\mathcal{O}_K^*) \subset V = \{\sum a_i = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{r+s}$ - סריג של ממד $r+s-1$. וכן
$$\mathcal{O}_K^* \cong \underbrace{\mu_K}_{\ker l} \times \mathbb{Z}^{r+s-1}$$

כעת, שים לב $\mathcal{O}_K^* \subseteq K_{\mathfrak{m}}$ והמנה של $K_{\mathfrak{m}}/K_{\mathfrak{m},1}$

$\Leftarrow$ $\mathcal{O}_K^* / K_{\mathfrak{m},1} \cap \mathcal{O}_K^*$ סופי —

$\Leftarrow$ $\mathcal{O}_K^* / K_{\mathfrak{m},1}$ תת חבורה מאינדקס סופי ב-$\mathcal{O}_K^*$

לכן, $\mathcal{O}_K^* \cap K_{\mathfrak{m},1} \cong \underbrace{\mu_{\mathfrak{m}}}_{\text{שורשי יחידה ב-}K_{\mathfrak{m},1}} \times \mathbb{Z}^{r+s-1}$. וגם, $l(\mathcal{O}_K^* \cap K_{\mathfrak{m},1})$ תת סריג

מאינדקס סופי ב-$\mathcal{O}_K^*$. נבחר

$w_1, \ldots, w_{r+s-1} \in \mathcal{O}_K^* \cap K_{\mathfrak{m},1}$ - בסיס של החלק החופשי

כך ש-$W_i = l(w_i)$ פורשים ב-$\mathbb{R}$ את V. נשלים לבסיס ע״י

$$W = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{r \text{ פעמים}}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{s \text{ פעמים}})$$

ניזכר -

למה: החבורה $\mathcal{O}_K^* \cap K_{\mathfrak{m},1}$ היא מכפלה ישרה של החבורה הסופית $\mu_{\mathfrak{m}}$ של שורשי היחידה ב-$K_{\mathfrak{m},1}$ ושל החבורה החופשית על בסיס $w_1, \ldots, w_{r+s-1}$. התמונות $W_i = l(w_i)$ יחד עם W, בסיס של $\mathbb{R}^{r+s}$.

נרחיב את l ל-K^* ונראה שלכל $\alpha \in K^*$ יש ממשיים $c, c_i \in \mathbb{R}$ כך ש-$l(\alpha) = cW + \sum c_i W_i$.

אם u יחידה, אז

$$u = \omega \prod_{i=1}^{r+s-1} w_i^{a_i} \quad , \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

שורש יחידה

$l(\omega)=0$, לכן

$$l(\alpha u) = cW + \sum (c_i + a_i) W_i$$

ניתן לבחור נציג עם $c_i \in [0,1)$ ע"י הכפלה בהפוך משמאל. קיבלנו

<u>למה:</u> נסמן ω_m = מס' שורשי יחידה ב-$K_{m\Delta}$. אז $S(\omega,k)\cdot w_m$ הוא מס' נקודות הסריג $x \in L_n$, $x=(x_1,\dots,x_d)$, כך ש-

① $v(\mu(x))$ – חיובי בקואורדינטות המתאימות לשורשים ב-m_ω

② $0 \le N(\mu(x)) \le n N_\Sigma$

③ $l(\mu(x)) = cW + \sum c_i W_i$, עם $0 \le c_i < 1$.

נסמן $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ להיות כל הווקטורים

$$y = (y_1, \dots, y_s)$$

כך ש-$y_i \neq 0$ לכל i, ונסמן

$$l(y) = (\log(|y_1|), \dots, 2\log(|y_{r+s}|))$$

אז,

$$l : \Omega \to \mathbb{R}^{r+s}$$

~~הגדרה: יהי $\Gamma_0 = \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ קבוצת כל ה-$y \in \Omega$ כך ש-~~

<u>הגדרה:</u> יהי $\Gamma_0 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ קבוצת כל ה-$y \in \Omega$ כך ש-

1. כל הקואורדינטות שמתאימות ל-σ_i ב-m חיוביות
2. $0 < N(y) \le 1$
3. $l(y) = cW + \sum_{i=1}^{r+s} c_i w_i$ עם $0 \le c_i < 1$.

נחשב את הנפח של Γ_0 ע"י אינטגרל ורק אז נספור נקודות.

<u>נחשב φ</u> - נחשוב על $\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ כמרחב אוקלידי ממימד $r+2s=d$. נסמן

$L' = v(m_0 \mathfrak{c})$ - סריג שלם ב-$\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$

נספור נק' סריג ב-$L \cap t\Gamma_0$, $t \to \infty$. אם $y \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ מקיים את התנאים של Γ_0, אז ty מקיים את ③ וגם -

2' - $0 < N(ty) \le t^d$

3' - $l(ty) = (d\log t)W + \sum_{j=1}^{r} c_j W_j$

נבחר $t^d = n \cdot N_\mathfrak{c}$. נקבל שמס' נקודות הסריג ב-$L' \cap t\Gamma_0$ הוא בדיוק

אחר = $\omega_m S(n,K)$ ונבד שני מעבר תוש 21 שהניג,

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_0) = \mathrm{Vol}(\Delta') \cdot \frac{w_m}{N_C} \lim_{n\to\infty} \frac{S(n,K)}{n}$$

תישאר כעת רק $\mathrm{Vol}(\Gamma)$.

<u>מסקנה:</u>

$$\lim\left(\frac{S(n,K)}{n}\right) = \frac{2^s \mathrm{Vol}(\Gamma_0)}{w_m N_{m_0} |\Delta_K|^{1/2}}$$

<u>הערה חשובה:</u> שימו לב ש-

$$\lim_{s\to 1^+} (s-1)\zeta(s,K)$$

לא תלוי ב-K.

נעבור לחשב את $\mathrm{Vol}(\Gamma)$. התנאים המגדירים הם -

1״ - $y_i > 0$ לכל $i=1,\dots,r$ ממשיים.

$\mathrm{Vol}(\Gamma_0) = 2^{r-r_0}\mathrm{Vol}(\Gamma)$. $r_0 = \#$ ממשיים ב-m

נעבור לקואורדינטות פולריות -

$$y_j = \rho_j \quad , \quad 1 \le j \le r$$
$$y_j = \rho_{r+j} e^{i\theta_j} \quad r+1 \le i \le s$$

(A) $\rho_j > 0$ לכל j

(B) $0 <, 1 \ge \rho = \rho_1 \cdots \rho_r \rho_{r+1}^2 \cdots \rho_{r+s}^2$

(C) $\log \rho_j = \frac{\log \rho}{d} + \sum c_k \log \sigma_k(\omega_k)$

ועם $0 < \theta_j \le 2\pi$. צריך לחשב את $\mathrm{Vol}(\Gamma) = \int_{\rho,\theta - A-C} \rho_{r+1}\cdots\rho_{r+s}\, d\rho_1 \cdots d\rho_{r+s}\, d\theta_1 \cdots d\theta_s =$

$$= (2\pi)^s \int_{A-C} \rho_{r+1}\cdots\rho_{r+s}\, d\rho_1 \cdots d\rho_{r+s}$$

נחליף ל-ρ, c_j.

$$0 < \rho \le 1$$
$$0 \le c_j < 1$$
$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \rho} = \frac{\rho_i}{\rho d}$$
$$\vdots$$

- רסאן

$$\operatorname{reg}(m) = \operatorname{vol}_{\sum a_i = 0}\begin{pmatrix} W \\ W_1 \\ \vdots \\ W_{r+s-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\operatorname{vol}(\Gamma) = \pi^s \operatorname{reg}(m)}$$

וכל,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{S(u,v)}{u} = \frac{2^{s+r-r_0}\operatorname{reg}(m)}{N(m_0)|\Delta_K|^{1/2} w(m)}$$