27/3/19

הרצאה 5

סיעוף בהשמה והרחבה גלואה מקומית

משפט: יהי K שדה עם v הערכה בדידה. ניקח L/K הרחבה פרידה סופית, $w_1, \dots, w_g$ כל ההרחבות של v ל-L. יהיו $(L_{w_i}, \hat{w}_i)$, $(K_v, \hat{v})$ ההשלמות.

(1) $f(\hat{w}_i|\hat{v}) = f(w_i|v)$, $e(\hat{w}_i|\hat{v}) = e(w_i|v)$.

(2) $L \otimes_K K_v \cong \prod_{i=1}^{g} L_{w_i}$

הוכחה: (1) ברור ש- $v(K^*) = \hat{v}(K_v^*)$, $w_i(L^*) = \hat{w}_i(L_{w_i}^*)$. לכן, $e(w_i|v) = e(\hat{w}_i|\hat{v})$. [כי לפי הגדרה של מת' הרחבה] ברור גם ש- $\mathcal{O}_{\hat{v}}/\mathfrak{p}_{\hat{v}} \cong \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v$, ולכן ש- $\mathcal{O}_{\hat{w}_i}/\mathfrak{p}_{\hat{w}_i} \cong \mathcal{O}_{w_i}/\mathfrak{p}_{w_i}$, ולכן -

$$f_i = [\mathcal{O}_{w_i}/\mathfrak{p}_{w_i} : \mathcal{O}_v/\mathfrak{p}_v] = [\mathcal{O}_{\hat{w}_i}/\mathfrak{p}_{\hat{w}_i} : \mathcal{O}_{\hat{v}}/\mathfrak{p}_{\hat{v}}] = f_i(\hat{w}_i|\hat{v})$$

(2) יש לנו הטלה טבעית,

$\psi_i : L \longrightarrow L_{w_i}$ - הטלה השלמה

ניתן להרחיב להטלה:

$$\prod_{i=1}^{g} \psi_i : L \longrightarrow \prod_{i=1}^{g} L_{w_i}$$

ובהיות להטלה -

$$\phi : L \otimes_K K_v \longrightarrow \prod_{i=1}^{g} L_{w_i}$$

$$\phi(x \otimes y) = (\psi_i(x) y)_{i=1}^{g}$$

ϕ היא על - השדה $L \otimes_K K_v$ הוא שלם ולכן $\prod \psi_i(L) \subseteq \prod L_{w_i}$ בפרט ממשפט ניר ירוב הרלוונטי.

הסבר יותר מפורט: משפט ניר ירוב הרלוונטי $\Leftarrow$ $\prod \psi_i(L) \subseteq \prod L_{w_i}$ בפרט. מצד שני, אם $(x_1, \dots, x_g) \in \prod_{i=1}^{g} L_{w_i}$, $y_n \in L$ מקיים $\prod \psi_i(y_n) \longrightarrow (x_1, \dots, x_g)$ ב-

$\Leftarrow$ נרשום את y_n לפי בסיס ל-L/K, $y_n = \sum a_{in} \alpha_i$, אז $\{a_{in}\}$ קושי ב-K, קיים לה גבול $a_{in} \to a_i$ ב- K_v, ואז,

$$(x_1, \dots, x_n) = \psi(\sum a_i \otimes \alpha_i)$$

לכן, $\dim_K L = n = \dim_{K_v} L \otimes_K K_v$, ומצד שני, $\dim_{K_v} L_{w_i} = \hat{e}_i \hat{f}_i = e_i f_i$, ולכן $n = \sum e_i f_i = \dim_{K_v} \prod L_{w_i}$. לכן ϕ איזומורפיזם. □

מסקנה: L/K הרחבה גלואה, עם חבורת גלואה $G = Gal(L/K)$. נניח שיש הערכה בדידה v על K, w הערכה בדידה של L מעל v. אזי L_w/K_v גלואה, והטלה בנורם $res: Gal(L_w/K_v) \to G$ משרה איזומורפיזם $Gal(L_w/K_v) \cong D_{w/v} = D_{\mathfrak{P}_w/\mathfrak{p}_v}$

תזכורת: $D_{w/v} = \{\sigma\in G \mid w(x)>0 \Leftrightarrow w(\sigma x)>0\} \Leftrightarrow \{\sigma\in G \mid \sigma\mathfrak{p}_w=\mathfrak{p}_w\}$

הוכחה: $\sigma\in D_{w/v} \Leftrightarrow \sigma$ פועל על L_w, כי σ פועל על L ושומר על הערך המוחלט, ואם $x_n\in L$ קושי אז $\sigma(x_n)$ קושי: $\sigma D_{w/v}$ פועל שמאלה. מכאן נובע ש- $L_w/L_w^{D_{w/v}}$ - גלואה. לכן חבורת גלואה $D_{w/v}$. ברור ש- $K_v\subseteq L_w^{D_{w/v}}\subseteq L_w$. לכן אם $[L_w:K_v]=ef$, ולכן $K_v=L_w^{D_{w/v}}$. ∎

$\underbrace{L_w^{D_{w/v}}}_{|D_{w/v}|=ef}$

מסקנה: $L\cap K_v = L^{D_{w/v}}$.

הערה: נניח יש -

$$\mathbb{Q}_p - L^{ur} - L^{tr} - L$$

גלואה — הרחבה לא מפורקת שקטית — הרחבה בין השקטית לבין שאינם הפיכים ל-p

בשקטה כן: $L^{ur}=L^I$, $I=$ תת חבורת אינרציה (כי יש קו כושלי אחד!)

בשביל להסביר ש- L^{tr} קיים, משתמשים בכך ש- $Gal(L/\mathbb{Q}_p)=G$ יש בו סדרה - $G\triangleright G_0=I\triangleright G_1\triangleright\cdots$

G_1 - תת חבורת p, מינימלית ב- G

בסיכום כן: $L^{ur}/\mathbb{Q}_p$ - לא מפורקת

L^{tr}/L^{ur} - מפורקת בהתמלה (tamely ramified)

L/L^{tr} - מפורקת בפחות (wildly ramified)

יתר על כן, $Gal(L^{ur}/\mathbb{Q}_p)\cong C_f$, ו- $Gal(L^{tr}/\mathbb{Q}_p)$ - לא ציקלי, מאחר בגלואה $Gal(L/L^{tr})$ היא חבורת p.

מסקנה חשובה שאין הרבה -

מסקנה: 1) חבורת הפיצול היא פתיחה.

2) חבורת אינרציה בכושלי p היא מחלוקה - $I=P\rtimes C$ כאשר P חבורת p מסדר $N_p=p^\alpha$, C ציקלי מסדר כן ל-p.

בפרט, אם $L/\mathbb{Q}$ גלואה, p מפורקת מאינפיניטי פיצול e, ויהי $\mathfrak{p}$ אחד (כלומר p מפורקת בהתמלה) אז I_p ציקלי.

הרחבות לא מפורקות של שדות מקומיים

משפט: יהי (K,v) שדה מקומי ל-v בדיד. יהי $\bar{K}$ שדה הסגור, ותהי $\bar{K}/K$ הרחבה פרבלית סופית. אז יש הרחבה לא מפורקת יחידה L/K כך ש- $L=K\bar{L}$. בפרט, אם $\bar{K}$ סופי, אז לכל n יש הרחבה לא מפורקת יחידה L/K מדרגה n.

הוכחה:

* קיום – ניקח $x_0 \in L_0$ כך ש- $L_0 = \bar{K}(x_0)$, ויהי –

$$\bar{f} = x_0^n + \bar{a}_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \bar{K}[x]$$

המינימלי של x_0 מעל $\bar{K}$. נרים לפולינום –

$f(x) = x^n + \dots + a_0 \in K[x]$ – מאיזשהו מעלה n

f אי פריק. אם לא, אז $f = gh$, g, h מאקסים, אז $g, h \in \mathcal{O}_v[x]$

ואז $\bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$ ⇐ בה"כ $\deg \bar{g} = 0$ ⇐ $\deg g = 0$.)

ניקח שורש x של f, וניקח $L = K(x)$. אז,

$$\bar{L} = \bar{K}(\bar{x}) \cong L_0, \quad ef = [L:K] = [L_0 : \bar{K}] = f$$

לכן $e = 1$.

* יחידות – נניח L_1, L_2 – e שני שדות כנ"ל (לא מעלים + $\bar{L}_i \cong L_0$). ניקח $x_0, f, \bar{f}$ כמו קודם. נבדוק את טענה של הנגל על f, x_0, ב- L_i, $i=1,2$. יש $x_i \in L_i$ יחיד כך ש- $f(x_i) = 0$ – $\bar{x}_i = x_0$. (בדוק את הנגל גם ב- $L_1 L_2$, ובגלל שיש הרחבה יחידה. אבל גם x_1, x_2 הם אלה לכן $x_1 = x_2$.

מכיוון ש- $[L_i : K] = f[L_i/K] = [L_0 : K]$ ⇐ $L_1 = K(x_1) = K(x_2) = L_2$. □

מסקנה: יהי K שדה p-אדי (הרחבה סופית של $\mathbb{Q}_p$). אז לכל $f \in \mathbb{Z}_{>0}$ יש הרחבה יחידה לא מסועפת, L/K מדרגה f. יתר על כן הרחבה כזו נוצרת ע"י שורש יחידה פרימיטיבי מסדר $q^f - 1$, $q = |\bar{K}|$.

הוכחה: אם $\mathbb{F}_{q^f} = \mathbb{F}_q(\mu_{q^f-1})$ לכן נוכל להרים (וזו ההרחבה היחידה של $\mathbb{F}_q$ מסדר f). אם ניקח $L = K(\mu_{q^f-1})$, זו מסועפת, $\bar{L} = \mathbb{F}_q[\mu_{q^f-1}]$. □

בדיוק שלב הסגור, הסגור $L = \mathbb{Q}_p^{ac}$ – סגור אלגברי,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \text{———} & \mathbb{Q}_p^{ur} = \mathbb{Q}(\mu_{p^\infty}) \\ | & & \Big| \ \mu_{p^\infty} = \bigcup_{p \nmid n} \mu_n \\ K & \text{———} & K^{ur} = K(\mu_{p^\infty}) \end{array}$$

הרחבות מסועפות לחלוטין

אם f פולינום אייזנשטיין, כלומר: $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ (K ~~שדה p-אדי~~)

כלומר, שאם בראש הערכה בינארית ש

$$v(a_i) \geq 1, \ v(a_n) = 1$$

ניקח α שורש, $L=K(\alpha)$. נראה ש- v מסוף לחלוטין ב- L.

הסבר: נרחיב את v ל- w, מתקיים -

$w(\alpha)\geq 0$ - כי הפולינום מאוקן של α

$$\infty = w(f(\alpha)) = w(\alpha^n + \dots + a_0)$$

אם $w(\alpha)=0$ - נקבל ש- $w(\alpha^n+\dots+a_0)=0$ בסתירה. לכן $w(\alpha)>0$. אזי,

$$w(\underbrace{(\alpha^n+a_0)}_{w(\cdot)>1}+\underbrace{\alpha(a_{n-1}\alpha^{n-2}+\dots+a_1)}_{w(\cdot)>1})=\infty$$

$$\Rightarrow w(\alpha^n+a_0)>1 \underset{w(a_0)=1}{\Rightarrow} w(\alpha^n)=1 \Rightarrow \boxed{w(\alpha)=1/n}$$

תרגיל: אם L/K מסוף לחלוטין, אזי $L=K(\alpha)$, α שורש של פולינום אי-פריק.

ערכים מוחלטים ארכימדיים

$(K,|\cdot|)$ שדה כך ש- $\{|n\cdot 1_K| \mid n\in\mathbb{Z}\}$ לא חסום. בשרה כנ"ל בפרט $char(K)=0$.

משפט: $K\cong\mathbb{C},\mathbb{R}$ עם הערך הסטנדרטי.

הוכחה: $\mathbb{Q}\subseteq K$, נסמן $R=closure_K(\mathbb{Q})\subseteq K$, $R\cong\mathbb{R}$ (מהתרגול הבלוגרסלי של השדות). ר"ל, לכל $K\ni\alpha$ נלקח את K ב- $K(i)$, ואם $K(i)\cong\mathbb{C}$ אז $K(i)\cong\mathbb{R}$ (כי $i^2=-1$) $K=$

נשמן, $K\supseteq R(i)=\mathbb{C}\cong\mathbb{C}$. אם $K=\mathbb{C}$ - סיימנו. נשים לב שזה נכון ש- $K\subsetneq\mathbb{C}$. ניקח $z\in K-\mathbb{C}$.

נשמן:

$$\rho=\inf_{\alpha\in\mathbb{C}}\{|z-\alpha|\}$$

אם $\rho=0$, אז $z\in\mathbb{C}$ כי $\mathbb{C}$ שלם. לכן סיפ. קיים α כך ש- $|z-\alpha|=\rho$. כדי לראות זאת, נסתכל על הכדור:

$$\{\beta\in\mathbb{C} \mid |\beta|\leq\rho+|z|+1\}$$

- כדור קומפקטי ב- $\mathbb{C}$, ו- $|\beta-z|=g(\beta)$ - רציפה. לכן יש לה מינימום באינטרוול α.

נלקח את z ב- $z-\alpha$ כך לקבל ש- $\alpha=0$.

לכן, $|\alpha-z|=|z|=\rho>0$, לכל $\alpha\in\mathbb{C}$.

טענה: אם $\rho>|\alpha|$, אזי $\rho=|\alpha-z|$.

אם נקח $\xi\in\mathbb{C}$ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n.

$$|z|^n+|\alpha|^n\geq|(z^n-\alpha^n)|=\left|\prod_{i=0}^{n-1}(z-\xi^i\alpha)\right|=\prod_{i=0}^{n-1}|z-\xi^i\alpha|$$

לכל $i\geq 1$ מתקיים $\rho\leq|\alpha\xi^i-z|$. נקבל -

$$|z-\alpha|\cdot\rho^{n-1} \le |z|^n + |\alpha|^n$$

$$\Leftarrow \quad |z-\alpha| \le \frac{\rho^n + |\alpha|^n}{\rho^{n-1}} = \rho(1+c^n)$$

כאן $c = \frac{|\alpha|}{\rho} < 1$. נניח $n \to \infty$ ונקבל $|z-\alpha| \le \rho$ והיא יש פתרון.

<u>טענה:</u> $|z-\alpha| = \rho$ לכל $\alpha \in \mathbb{C}$.

אם $\alpha = \beta$, ואז $|\beta| < \rho$. ונסיק מ- הטענה הקודמת אינטואיטיבית-

על ρ ב- יש z $\Leftarrow$ $|z-\beta| = \rho$

$$\Downarrow$$

$$\rho = |\underbrace{\rho - (z-\beta)}_{z'}|$$

וכו' ...

סה"כ, נקבל:

$$3\rho = |z-3\rho-z| \le |z-3\rho| + |z| \le \rho+\rho = 2\rho$$

-סתירה. $\square$

אם K שדה, $\sigma: K \to \mathbb{C}$ שיכון. אז כמו מבדיר לו ערך מוחלט,

$$|x|_\sigma := |\sigma(x)|_{\mathbb{C}}$$

~~אם σ שיכון, שונה, שונה~~

אם $\sigma, \tau: K \to \mathbb{C}$ שיכונים כך ש- $\sigma \ne \tau$, אז $|\cdot|_\sigma, |\cdot|_\tau$ לא שקולים.

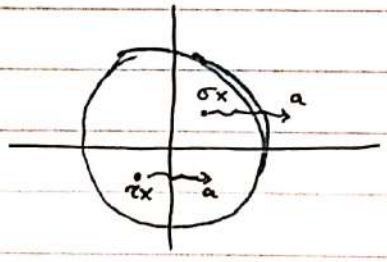
אם יש $x \in K$ כך ש-

$$Re(\sigma x) \ne Re(\tau x)$$

ואז קיים $q \in \mathbb{Q}$, כך ש-

$$\sigma x + q \in \mathbb{D}$$

$$\tau x + q \notin \mathbb{D}$$



<u>מסקנה:</u> יהי K שדה מספרים עם r שיכונים ממשיים, $2s$ שיכונים מרוכבים

בצורה: $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ ממשיים, $\sigma_{r+1}, \overline{\sigma_{r+1}}, \dots, \sigma_{r+s}, \overline{\sigma_{r+s}}$ מרוכבים, כך ש-

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$$

מהדרך המושרה ע"י -

$$x \otimes q \mapsto (\sigma_1(x)q, \dots, \sigma_r(x)q, \sigma_{r+1}(x)q, \dots, \sigma_{r+s}(x)q)$$

בפרט, $|\cdot|_{\sigma_i}$ הם כל הערכים המוחלטים הארכימדיים על K.

<u>הגדרה:</u> אלו מ"ו ממדלה n מעל $\mathbb{R}$. לכן ניתן לחבר שהדרך הינו

על - כיוון ש- $\mathbb{Q}$ מוכל לשרים שלו, ואז K בפרט ...)

אם $|\cdot|$ הנורמה על K, $\bar{K}$ הדרך $\iota: K \to \bar{K}$ הדרך הנ"ל, אז:

$$\iota \otimes id: K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \bar{K}$$

-כי השטח שדה שלם, לכן על. לכן $id \otimes \iota$ מגדה מרחב בגלל, נתון ל-i,

ולכן י' גנ' ב שתי שאינם שמכיל אלה $|\cdot|_{\sigma_i} \cong |\cdot|$. $\square$