ומכאן, משיקולי הערכים המוחלטים,

$$\left|\frac{x^{n_i}}{y^{m_i}}\right|_2 < 1$$

ולכן, $|x|_2 < |y|_2^{m_i/n_i}$. נקבל, בלקיחת גבול,

$$|x|_2 \le |y|_2^b$$

באופן דומה בלקיחת $b > m_i/n_i$ נקבל,

$$|x_2| \ge |y|_2^b$$

לכן $|x|_2 = |y|_2^b$. ואז,

$$|x|_2 = |y|_2^b = |y|_1^{ab} = |x|_1^a \qquad \blacksquare$$

<u>6/3/19</u>

$\boxed{\text{הרצאה 2}}$

ע"מ על <u>שדה K</u> - פונקציה $|\cdot|: K \to \mathbb{R}$.

① $|x| \ge 0$ לכל $x \in K$, וגם $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

② $|xy| = |x| \cdot |y|$.

③ $|x+y| \le |x| + |y|$

ערך מוחלט הוא <u>אולטרה-מטרי</u> אם הוא מקיים את -

③' $|x+y| \le \max\{|x|,|y|\}$

מתקיים ש-③' $\Rightarrow$ ③.

ערך מוחלט המקיים את ①,②,③ <u>ולא</u> את ③' נקרא ע"מ ארכימדי.

הגדרנו ע"מ שקולים והוכחנו ש- $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2 \Leftrightarrow$ קיים $a>0$ כך ש- $|x|_1^a = |x|_2$.

בהינתן הערכה $v: K \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, הערכה ממשית, ומספר $0<c<1$ נגדיר ע"מ $|x|_v := c^{v(x)}$. (אם היינו בוחרים c אחר, היינו מקבלים ע"מ שקול)

<u>במקרה הנ"ל</u> - $O_v = \{x \in K \mid |x| \le 1\}$.

<u>תרגיל</u> - אם יש ע"מ H על K ~~$\{x \mid |x| \le 1\}$~~, וגם $|\cdot|$ לא ארכימדי, אז -

$O = \{x \mid |x| \le 1\}$ חוג-

ולכן הוא מגדיר הערכה v ומתקיים $|\cdot| \sim |\cdot|_v$.

מקבלים בסה"כ -

מחלקות שקילות של ע"מ לא ארכימדיים $\longleftrightarrow$ חוגי הערכה ממשיים

(ששייכים להערכה ממשית)

למה: ע"מ $|\cdot|$ על K הוא לא ארכימדי $\Leftrightarrow$ $\{|n\cdot 1_K| : n\in\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$ לא חסומה.

הוכחה: אם $|\cdot|$ לא ארכימדי, אזי -

$$|n\cdot 1_K| = |1+\dots+1| \le \max\{|1|,\dots,|1|\} = |1|$$

ולכן הקבוצה חסומה.

להיפך, ניקח $x,y\in K$. רוצים להראות ש-

$$|x+y| \le \max\{|x|,|y|\}$$

נסמן $|n\cdot 1_K|\le N$, $N\in\mathbb{R}_+$. נראה:

$$k\in\mathbb{N},\ |x+y|^k = \left|\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l y^{k-l}\right| \le \sum_{l=0}^{k}\left|\binom{k}{l}\right|\cdot|x|^l|y|^{k-l} \le$$
$$\le N|x|^k(1+k)$$

← בה"כ, $|x|\ge|y|$

נקבל:

$$|x+y| \le N^{1/k}\cdot|x|\cdot\sqrt[k]{1+k} \xrightarrow[k\to\infty]{} |x|$$

לכן $|x+y|\le|x|$. □

דוגמאות:

① יהא K שדה. נניח ש- $\iota: K\to\mathbb{R}$ - שיכון
כך מגדיר ע"מ על K לפי $|x| := |\iota(x)|_{\mathbb{R}}$.

② יהא K שדה עם שיכון -
$\iota: K\to\mathbb{C}$
נוכל להגדיר $|x| = |\iota(x)|_{\mathbb{C}}$.

③ אם p ראשוני ב-$\mathcal{O}_K$ (K שדה מספרים) אזי יש לנו ע"מ לא ארכימדיים ב-$\mathcal{O}_K$ - הע"מ ה-p-אדי - $|\cdot|_{v_p}$.

תזכורת: כותבים $(x) = \underbrace{p_1^{a_1}\cdots}_{\text{ראשוניים זרים}}$, $x\in K^*$ - (בגלל $v_p(x)=a_1$).

④ אם $char(K)>0$ אזי $\{n\cdot 1_K\}$ סופי- ולכן כל הע"מ הן לא ארכימדית.

ע"מ על $\mathbb{Q}$

מהדוגמאות האלו יש לנו את הערכים המוחלטים -

$$|x|_\infty = \begin{cases} x: & x>0 \\ -x: & x<0 \end{cases}$$

ויש לנו את $v_p(p^r\cdot\frac{a}{b})=r$ ($p\nmid a,b$) שמגדיר -

$$|x|_p = c^{v_p(x)},\quad 0<c<1$$

משפט: (אוסטרובסקי)

עד כדי שקילות, אלו הם הע"מ הלא טריוויאליים על $\mathbb{Q}$.

הוכחה: יהי $m,n>1$ נכתוב -

$$m = a_0 + a_1 n + \dots + a_r n^r, \quad 0 \le a_i < n$$

כאן $n^r \le m$ כלומר $r \le \frac{\log m}{\log n}$. ($\log$ בבסיס e)

נסמן $N=\max\{1,|n|\}$.

נקבל:

$$|m| \le \sum_{i=0}^{r} |a_i|\cdot|n|^i \le N^r \sum_{i=0}^{r} |a_i| \ (*), \quad |a_i| = |1+\dots+1| \le a_i\cdot|1| < n$$

נציב חסמים ב-$(*)$:

$$|m| \le N^{\log m/\log n}\cdot\left(\frac{\log m}{\log n}+1\right)\cdot n$$

נחליף באי"ש זה את m ב-m^s, עבור s כלשהו, וניקח שורש s. נקבל:

$$|m| \le (1+ s\log m/\log n)^{1/s}\cdot n^{1/s}\cdot N^{\log m/\log n}$$

ניקח $s\to\infty$ ונקבל -

$$(**) \quad |m| \le N^{\log m/\log n}$$

מקרה ראשון: נניח לכל $n>1$ ש-$|n|>1$. במקרה זה, $N=|n|$.

מכאן, $|m|^{\log n} \le |n|^{\log m}$. זה נכון לכל $m,n>1$ ⇐ מסימטריה יש שוויון,

$$|n|^{1/\log n} = |m|^{1/\log m}$$

לכן אם נסמן $c=|m|^{1/\log m}$, בת"ל בבחירת m, נקבל שלכל m,

$$|m| = c^{\log m} = |m|_\infty^{\log c}$$

כיון ש-$|-m|=|m|$, $|1/m|=|m|^{-1}$, נקבל ש-$|\cdot|\sim|\cdot|_\infty$.

מקרה שני: קיים $n>1$ כך ש-$|n|\le 1$. במקרה זה, $N=1$. לכן, לפי $(**)$,

$$|m| \le 1$$

לכן $|\cdot|$ לא ארכימדי ⇐ יש חוג הערכה $\mathcal{O}=\{x:|x|\le 1\}$ ויש לו אידיאל מקסימלי יחיד $\mathfrak{P}$. כמו כן מתקיים ש-$\mathbb{Z}\subseteq\mathcal{O}$. לכן $\mathbb{Z}\cap\mathfrak{P}$ אידיאל ראשוני $\neq 0$ כי $n\in\mathfrak{P}$. לכן, $\mathbb{Z}\cap\mathfrak{P}=(p)$, p ראשוני.

מתקיים שלכל m שלם,

$$|m|<1 \iff p\mid m$$

אם נסמן $c=|p|<1$, אזי,

$$\left|p^r\cdot\frac{a}{b}\right| = |p^r|\cdot\frac{1}{1} = c^r$$

ולכן $|\cdot|_p\sim|\cdot|$.

□

הגדרה: ראשוני של שדה K זה מחלקת שקילות של ע"מ*. ראשוני הוא סופי אם הע"מ לא ארכימדי. ראשוני הוא לא סופי אם הע"מ ארכימדי. נסמן $P(K)$ - כל הראשוניים, $P_\infty(K)$ - האינסופיים, $P_f(K)$ - הסופיים.

*- לא טריוויאלי.

ב-$\mathbb{Q}$ יש דרך סטנדרטית לבחור נציג מכל ראשוני של $\mathbb{Q}$ -

$$|x|_\infty = e^{\ln|x|_{\mathbb{R}}} = \begin{cases} x: & x>0 \\ -x: & x<0 \end{cases}$$

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}$$

משפט: (קל במקרה של $\mathbb{Q}$)
לכל $x\in\mathbb{Q}^*$, מתקיים -

$$\prod_{|\cdot|\in P(\mathbb{Q})} |x| = 1$$

נוסחה כזו נקראת נוסחת המכפלה.

הוכחה: מכפליות של הע"מים ניתן להניח ש- $x=p$ או $x=\pm1$.
אם $x=p$ ראשוני -

$$1 = \frac{p}{p} = \prod_{|\cdot|\in P(\mathbb{Q})} |p|$$

ול-±1 זה ברור. $\square$

נוסחת מכפלה נכונה גם לשדות מספרים. (נראה בהמשך...)

הערה בונוס: שדה עם נוסחת המכפלה בהכרח מקיים את משפט אי-הפריקות של הילברט, שאומר שאם $f(x,y)\in K[x,y]$ אי פריק וגם $\deg_y f\geq 1$ אז יש אינסוף $a\in\mathbb{Q}$ כך ש-$f(a,y)$ אי פריק. הוכיחו את זה פעם בשיעור של גלעד לא סטנדרטית.

השלמה

יהי $(K,|\cdot|)$ שדה עם ע"מ. סדרה $\{a_n\}\subseteq K$ נקראת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N>0$ כך שלכל $m,n>N$,

$$|a_n-a_m|<\varepsilon$$

נאמר ש-$\{a_n\}$ מתכנסת ל-$a\in K$ אם $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$.

אם $\{a_n\}$ מתכנסת אז היא קושי, אבל ההיפך לא נכון.

דוגמה: ניקח את $|\cdot|_7$ על $\mathbb{Q}$. נבנה באינדוקציה סדרה $0\leq d_n<7$ כך ש-

$$a_N = \sum_{i=0}^{N-1} d_i 7^i$$

מקיימת $a_N^2\equiv 2 \pmod{7^N}$. נבחר $d_0=3$, אז $a_0=3$, $a_0^2\equiv 2 \pmod 7$.

נניח שבנינו את $d_{N-1}, \ldots, d_0$. אזי,
$$a_N^2 \equiv 2 \pmod{7^N}$$
ננסה למצוא תנאי על d_N, כך ש-
$$a_{N+1}^2 \equiv 2 \pmod{7^{N+1}}$$
נשים לב כי -
$$a_N^2 = 2 + b\cdot 7^N, \quad a_{N+1} = a_N + 7^N \cdot d_N$$
ואז נקבל -
$$a_{N+1}^2 = a_N^2 + 2\cdot 7^N d_N + 7^{2N} \cdot d_N$$
ובלקיחת מודולו 7^{N+1} נקבל:
$$2 \equiv a_{N+1}^2 \equiv a_N^2 + 2\cdot 7^N d_N a_N \pmod{7^{N+1}}$$
$$\equiv 2 + 7^N(2a_N d_N + b)$$
שכן $a_N^2 \equiv 2 \pmod{7^N}$. לכן,
$$a_{N+1}^2 \equiv 2 \pmod{7^{N+1}} \iff 2d_N \cdot 3 \equiv 2 d_N a_N \equiv -b \pmod 7$$
וזה קורה אמ"מ $d_N \equiv b \pmod 7$. זה מגדיר ביחידות את d_N.
קיבלנו אם כך סדרה $\{a_N\}$ כך ש-a_N קושי, כי:
$$|a_N - a_{N+k}| = \left|\sum_{k=N}^{N+k-1} 7^k d_k\right| \le 7^{-N} \longrightarrow 0$$
ע"פ אי"ש ארכימדי, $|d_k|=0$ או $|d_k|=1$.

אבל a_N לא מתכנסת ברציונלי, שכן אם היה לה גבול הוא היה חייב לקיים $a^2=2$, אבל אין רציונלי המקיים משוואה זו.

<u>הגדרה:</u>

① שדה L עם נ"מ $\|\cdot\|$ נקרא <u>שלם</u> (complete) אם כל סדרת קושי - מתכנסת.

② בהינתן שדה K עם נ"מ $(K,|\cdot|)$ <u>השלמה</u> שלו היא שדה L עם נ"מ $\|\cdot\|$, עם שיכון -
$$i: K \to L$$
כך ש-$\|\cdot\|$ מרחיב את $|\cdot|$, כלומר, $|x|_K = \|i(x)\|_L$, וכך ש-K צפוף ב-L.

<u>למה:</u> תהי $(L,\|\cdot\|)$ השלמה של $(K,|\cdot|)$. אז לכל שדה <u>שלם</u> $(E,|||\cdot|||)$ ולכל העתקה* רציפה f, $f: K \to E$ -
קיימת העתקה רציפה יחידה $g: L \to E$ כך ש-$f = g \circ i$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ & E \end{tikzcd}$$

* העתקה = בקטגוריה של שדות עם נ"מ, כלומר הומומורפיזם רציף.

הוכחה: תרגיל.

<u>מסקנה:</u> השלמה מוגדרת עד כדי איזומורפיזם רציף יחיד.

<u>משפט:</u> לכל שדה K עם ע"מ $|\cdot|$ יש השלמה.

<u>הוכחה:</u> נסמן ב-C את קבוצת סדרות הקושי ב-K ונסמן ב-$N \subseteq C$ את הסדרות שמתכנסות לאפס. נשכן את K ב-C ע"י -

$$K \ni x \longmapsto \{x\}_{n=1}^{\infty} \in C$$

(הסדרה הקבועה x)

נגדיר חיבור וכפל של איברים ב-C קואורדינטה-קואורדינטה -

$$\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$$
$$\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_n\cdot b_n\}$$

ולכן C הינו K-אלגברה. כיוון שהאיברים ב-C הם סדרות חסומות: אם $\{a_n\}\in C$, ניקח $\varepsilon=1$ ולכן יש סימן N כך שלכל $n\geq N$,

$$|a_n|-|a_N| \leq |a_n-a_N| \leq \varepsilon$$

$\Leftarrow |a_n| \leq |a_N|+1$, והחסם הוא $M=\max_{i=1}^{N}\{|a_i|, |a_N|+1\}$. אש"מ - ההפוך

לכן, N <u>אידיאל</u>, ונקבל את ההומומורפיזמים -

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\iota"'] & C \arrow[r] & C/N = L \end{tikzcd}$$

די להוכיח ש-(1) L הוא שדה

(2) L שלם ביחס לע"מ שמרחיב את $|\cdot|$ על K.

כדי להראות ש-L שדה, די להראות ש-N מקסימלי. די להראות ש-$\{a_n\}\in C-N$ הוא הפיך מודולו N. כיוון ש-$\{x_n\}\not\to 0$ וקושי יש N כך שלכל $n>N$, $x_n\neq 0$.

(<u>הסבר:</u> אם $\{x_n\}$ קושי אז $\{|x_n|\}$ קושי ב-$\mathbb{R}$ ולא שואפת לאפס לכן $|x_n|>0$ לכל $n>>1$.)

נגדיר -
$$y_n=\begin{cases}5, & x_n=0\\ 1/x_n, & x_n\neq 0\end{cases}$$

אז,
$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\}\cdot\{y_n\}=1$$

ולכן $\{x_ny_n\}-1\in N$ כנדרש.

נגדיר ע"מ על L -

$$\|\{a_n\}\| := \lim_{n\to\infty}|a_n|$$

צריך להראות שזה מוגדר היטב. (כלומר שאם $\{a_n-b_n\}\in N$, אזי $\lim\|a_n\|=\lim\|b_n\|$ שזה נכון כי $|a_n-b_n|\to 0$)

משתמשים - כי $|a_n|$ קושי ב-$\mathbb{R}$. ותכונות הערך המוחלט נורשות מהערך המוחלט על K, כי הם עוברות בגבול, ולקחנו מודולו סדרות ששואפות ל-0. וברור שמרחיב את $|\cdot|$.

צפיפות K: ברור - אם $\{a_n\}$ קושי, אזי הסדרה

$$b_n^{(k)} = a_k \quad \text{- סדרה קושי}$$

$$\{b_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{- סדרת סדרות קושי}$$

ומתקיים -

$$\|\{b_n^{(k)}\}-\{a_n\}\| = \lim_{n\to\infty}|b_n^{(k)}-a_n| = \lim_{n\to\infty}|a_k-a_n| \le \varepsilon$$

ומשום שהסדרה היא סדרת קושי מתקיים האי"ש האחרון ל- $k\gg 1$.

ונותר להראות ש-L היא שלם. ניקח - $\{u^{(k)}\}\subseteq \mathcal{C}$ קושי ב-$\mathcal{L}$, עם $\|\cdot\|$ שהגדרנו. כלומר,

$$u^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{קושי ב-}K$$

לכל $k>0$, יש $N(k)$ כך שלכל $m,n\ge N(k)$,

$$|x_n^{(k)} - x_m^{(k)}| \le \frac{1}{k}$$

נגדיר -

$$u = \{x_{N(n)}^{(n)}\}$$

צריך להראות ש- (1) u קושי

(2) $u^{(n)} \xrightarrow{L} u$

(1) - יהי $\varepsilon>0$. כיוון ש-$\{u^{(k)}\}$ קושי ב-L, עבור M גדול מספיק, לכל $k,m\ge M$,

$$\varepsilon/3 \ge \|u^{(k)}-u^{(m)}\| = \lim_{\mu\to\infty}|u_r^{(k)}-u_r^{(m)}|$$

נבחר $M\ge 3/\varepsilon$. לכל $r,s\ge M$ (נבחר $k\ge N(r),N(s)$).

$$|x_{N(r)}^{(r)} - x_{N(s)}^{(s)}| \le |x_{N(r)}^{(r)} - x_k^{(r)}| + |x_k^{(s)} - x_{N(s)}^{(s)}| + |x_k^{(r)}-x_k^{(s)}| \le$$

$$\le \frac{2\varepsilon}{3} + |x_k^{(s)}-x_k^{(r)}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \varepsilon$$

ולכן קושי.

(2) נחשב:

$$\|u^{(n)}-u\| = \lim_{k\to\infty}|x_k^{(n)} - x_{N(k)}^{(k)}| \le \lim_{k\to\infty}\Big[\underbrace{|x_k^{(n)}-x_{N(n)}^{(n)}|}_{\le 1/n,\ k\ge N(n)} + \underbrace{|x_{N(n)}^{(n)} - x_{N(k)}^{(k)}|}_{\text{קטן כרצוננו כי } u \text{ קושי}}\Big]$$

לכן אם ניקח $n \to \infty$ נסיים. $\square$

לכן לכל שדה עם ע"מ יש השלמה.

<u>סימון:</u> לכל $p \in P(\mathbb{Q})$ נסמן ב-$\mathbb{Q}_p$ את ההשלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס לע"מ ה-p-אדי. בפרט אם $p=\infty$, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. עבור p סופי נקרא לשדה הנ"ל שדה המספרים ה-p-אדיים.