22/5/19

הרצאה 10

L/K - הרחבת גלואה של שדות מספרים. $\left(\frac{L/K}{p}\right)$ - מחלקת צמידות פרובניוס

לכל $p \in \mathbb{P}_f(K)$ לא מסועף ב-L: $G \ni \left(\frac{L/K}{\beta/p}\right)$ - יוצר פרובניוס. לכל

$x \in \mathcal{O}_L$ הוא מוגדר כך:

$$\left(\frac{L/K}{\beta/p}\right)x \equiv x^{N_p} \mod \beta$$

<u>משפט צ'בוטרב</u>: התפלגות אחידה של פרובניוס.

פונקצית L של הרחבה צקלוטומית - אם $\chi \in \hat{G} = \widehat{Gal(L/K)}$ אזי χ מגדיר

קרקטר של $I^{\mathfrak m}$ (עבור $\mathfrak m$ מודולוס המכיל את כל הראשוניים המסועפים)

ע"י $\chi(\sigma) := \chi(\phi_{L/K}(\sigma))$ ובפרט לכל ראשוני $\chi(p) = \chi\left(\left(\frac{L/K}{p}\right)\right)$.

$$L_{\mathfrak m}(s,\chi) = \prod_{\beta \in I^{\mathfrak m}} \left(1-\chi(\beta)N_\beta^{-s}\right)^{-1}$$ (בשימוש הקודם - הבלבול בין χ ו-$\chi\circ\phi$)

<u>ראינו</u>: χ לא טריויאלי על $I^{\mathfrak m}$ אז $L(s,\chi)$ אנליטית ב-$Re(s) > 1-\frac{1}{d}$ ($d=[K:\mathbb{Q}]$)

ואם $\chi=\chi_0$ טריויאלי אז ל-$L(s,\chi)$ יש קוטב פשוט ב-$s=1$.

~~משפט: Ker~~

<u>משפט</u>: χ מוגדר ומעשה על $C_K^{\mathfrak m}$ (כלומר $\chi(K_{\mathfrak m,1})=1$) (עבור $\mathfrak m$: תנאי - $L/K|\mathfrak m$)

$\chi \in \hat{G} \longleftrightarrow \chi \in \widehat{C_K^{\mathfrak m}}$. רוצים להוכיח משפט על התמונה.

<u>טענה</u>: אם $L=K(\xi)$, ξ שורש יחידה מסדר k, $\mathfrak m$ מודולוס כך ש-$k|\mathfrak m$. אז

$\phi_{L/K}: C_K^{\mathfrak m} \to Gal(L/K)$ היא על ובפרט כל $\chi_0 \neq \chi \in \widehat{Gal(L/K)}$ משרה קרקטר לא

טריויאלי על $C_K^{\mathfrak m}$.

יש לנו כי $L_{\mathfrak m}(1,\chi) \neq 0$ עבור $\chi \neq \chi_0 \in \widehat{Gal(L/K)}$ אנליטית ב-$s=1$.

<u>הוכחה</u>: נסמן $\Gamma = \phi_{L/K}(C_K^{\mathfrak m})$. צ"ל $\Gamma = G = Gal(L/K)$. $\sigma \in \Gamma \le G$, $o(\sigma)=f$,

$$(1-u^f)^{|\Gamma|/f} = \prod_{\chi \in \hat\Gamma}(1-\chi(\sigma)u)$$

נקח $p \in P_K$, לא מסועף - ראינו

נסמן $\sigma = \left(\frac{L/K}{p}\right)$, $u = N_p^{-s}$.

$$\prod_{P_L \ni \beta|p}\left(1-N_\beta^{-s}\right)^{-1} = \prod_{\beta|p}\left(1-N_p^{-fs}\right)^{-1} =$$

$$\underset{\text{לא מסועף}}{=} \left(1-N_p^{-fs}\right)^{|G|/f} =$$ $f_{\beta/p}$ ⇐ $fg=|G|$, $f=o(\sigma)$ כי כך סדרים שווים

$$= \prod_{\chi \in \hat\Gamma}\left(1-\chi\left(\left(\frac{L/K}{p}\right)\right)N_p^{-s}\right)^{-|G|/|\Gamma|}$$

$$\frac{|G|}{f} = \frac{|\Gamma|}{f}\cdot\frac{|G|}{|\Gamma|}$$

נכפיל בכל $p \in I^{\mathfrak m}$. נקבל:

~~לא בהכרח H ל-2~~

$$\zeta_L(s) = \prod_{\chi\in\hat{H}} L\Big(s, \underbrace{\chi\circ\Big(\tfrac{L/K}{\cdot}\Big)}_{\text{לא טריוויאלי על } C_K^m}\Big)^{|G|/|H|}$$

קיים להרחבה H ל-2

שכן $\hat{H}=\mathrm{im}\,\phi$, אם $\chi\neq\chi_0$!

נחשב את הסדר ב-$s=1$. זה שווה לפחות -1. זה ימין נותן

$$\underbrace{\frac{|G|}{|H|}\cdot(-1)}_{\chi_0} + \frac{|G|}{|H|}\underbrace{\sum_{\chi\neq\chi_0} \mathrm{ord}\, L_\chi}_{\geq 0}$$

לכן, $1 \mid \frac{|G|}{|H|} \Leftarrow \frac{|G|}{|H|}=1$, ובנוסף $\mathrm{ord}\, L_\chi = 0$ לכל χ. □

<u>הגדרה:</u> אם $S\in P_f(K)$, נגדיר הצפיפות הדיריכלה של S ע"י

$$\delta(S) := \lim_{s\to 1} \sum_{\mathfrak{p}\in S} N\mathfrak{p}^{-s} \Big/ \sum_{\mathfrak{p}\in P_f(K)} N\mathfrak{p}^{-s}$$

<u>תרגיל:</u> אם $f(s)$ אנליטית ב-$\mathrm{Re}(s)>1-\varepsilon$ פרט אולי לקוטב ב-$s=1$, וכן

$$f(s) = \prod \left(1- a_{\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-s} + O(N\mathfrak{p}^{-2s})\right)$$

אז,

$$\sum a_{\mathfrak{p}} N\mathfrak{p}^{-s} \underset{s\to 1}{=} \mathrm{ord}_{s=1} f(s)\cdot \log(s-1) + O(1)$$

<u>משפט צ'בוטרב להרחבה ציקלוטומית</u>

תהי L/K הרחבה ציקלוטומית עם חבורת גלואה G, ויהי $\sigma\in G$.

אזי,

$$\delta\left(\left\{\mathfrak{p}\in P_f(K), \mathfrak{p} \text{ לא מסועף} \;\middle|\; \left(\tfrac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)=\sigma\right\}\right) = \frac{1}{|G|}$$

<u>מסקנה:</u> יש אינסוף ראשוניים $p\in P_f(\mathbb{Q})$ כך ש-$p\equiv a \pmod q$ לכל $(a,q)=1$ ובנוסף,

$$\delta=\{p\equiv a \bmod q\} = 1/\varphi(q)$$

(נובע מיידית משבוטרב ב-$\mathbb{Q}(e^{2\pi i/q})/\mathbb{Q}$ כי $\left(\frac{L/\mathbb{Q}}{p}\right)=p \pmod q$).

<u>הוכחת צ'בוטרב בהרחבה ציקלוטומית:</u>

רוצים להעריך את

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in P_f(K) \text{ לא מסועף} \\ \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)=\sigma}} N\mathfrak{p}^{-s} \underset{\text{רק מספר סופי שונים ה-}m}{=} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\in I^m \\ \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)=\sigma}} N\mathfrak{p}^{-s} + O(1) = (*)$$

לפי התרגיל, צריך להבין את הסכומים:

$$g \in G, \quad 1_{\{g=\sigma\}} = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(g)\chi(\sigma)^{-1}$$

$$\Rightarrow \circledast = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\hat{G}} \chi(\sigma^{-1}) \underbrace{\sum_{\mathfrak{p}\in I^m} \chi\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) N_{\mathfrak{p}}^{-s}}_{\text{נעריך את זה}} =$$

$$= (\ast\ast)$$

<u>נבחר χ:</u>

רוצים להעריך את:
$$\sum_{\mathfrak{p}\in I^m} \chi\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) N_{\mathfrak{p}}^{-s}$$

ולפי התרגיל: זה כמו להעריך ביטוי בהגדרה -

$$\prod \left(1-\chi\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)N_{\mathfrak{p}}^{-s} + O(N_{\mathfrak{p}}^{-2s})\right)^{-1}$$

וזה $L_m(s,\chi)$.

ולפי התרגיל נקבל ש-

$$\sum_{\mathfrak{p}\in I_m} \chi\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) N_{\mathfrak{p}}^{-s} = \begin{cases} O(1), & \chi\neq\chi_0 \\ -\log(s-1)+O(1), & \chi=\chi_0 \end{cases}$$

לסיכום,

$$\sum_{\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)=\sigma} N_{\mathfrak{p}}^{-s} = -\frac{1}{|G|}\log(s-1) + O(1)$$

וכיון ש- $\sum N_{\mathfrak{p}}^{-s} = -\log(s-1)+O(1)$ אז כל $\delta\left(\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right)=\sigma\right) = \frac{1}{|G|}$. ∎

<u>הערה:</u> מה צריך בכלל לצפות טאובר? יש "משפט טאוברים" שאם $f(s)$ הולומורפית ב- $\mathrm{Re}(s)\geq 1$, ול- $f(s)$ יש קוטב פשוט ב- $s=1$, $f(s)=\sum a_n n^{-s}$. אז, $\sum_{n\leq x} a_n \sim x$ (אם $\mathrm{Res}_{s=1}(f(s))=1$).

מפעילים את זה על הנגזרת הלוגריתמית של L:

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

צריך לדעת שאין אפסים ב- $\mathrm{Re}(s)\geq 1$. צריך גם מידע אנליטי.

<u>משפט צ'בוטרב:</u>

L/K גלואה (לאו דווקא אבלית), $G=Gal(L/K)$. נבחר מחלקת צמידות $C\subseteq G$.

$$\text{צפיפות}\left\{P\in P_f(K),\ \left(\frac{L/K}{P}\right)\in C\right\} = |C|/|G|$$

אנחנו נוכיח לצפיפות על הגדרה הדיריכלטית. (עובד עם צפיפות רגילה.

<u>תרגיל:</u> אם הצפיפות הרגילה קיימת, אז כך גם צפיפות דיריכלה, והן שוות.

נסמן

$$\pi(X, L/K, C) = \#\left\{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K) \;\middle|\; \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = C,\ N_{\mathfrak{p}} \le X\right\}$$

[L/K גלואה, $C=[\sigma]$ מחלקת צמידות]

ונסמן

$$\pi'(Y, L/K, \sigma) = \#\left\{\beta \in \mathcal{P}(L) \;\middle|\; \left(\frac{L/K}{\beta/\mathfrak{p}}\right) = \sigma,\ N_{\beta} \le Y\right\}$$

<u>למה:</u> בסימונים הנ"ל, אם $f = ord(\sigma)$

$$\pi(X, L/K, [\sigma]) = \pi'(Y, L/K, \sigma)\cdot\left(\frac{|G|}{|C|\cdot f}\right)^{-1}$$

כאשר $Y = X^{f}$.

<u>הוכחה:</u>

כמה β יש מעל $\mathfrak{p}$ עם $\sigma = \left(\frac{L/K}{\beta/\mathfrak{p}}\right)$

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathcal{P}(K) \\ N_\mathfrak{p}\le X,\ \left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}}\right) = [\sigma]}} 1 = \sum_{\substack{\beta\in \mathcal{P}(L) \\ \left(\frac{L/K}{\beta/\mathfrak{p}}\right) = \sigma \\ N_\beta \le X^f}} \frac{1}{\alpha_{\sigma,\beta}} = (*)$$

$(N_\mathfrak{p}^f)$

נזכר לרשום את $\alpha_{\sigma,\beta}$ (שווה שנ"ת ב-β)

G פועל טרנזיטיבית על β מעל $\mathfrak{p}$ וכן $\left(\frac{L/K}{\tau\beta/\mathfrak{p}}\right) = \tau\left(\frac{L/K}{\beta/\mathfrak{p}}\right)\tau^{-1}$.

לכן,

$$C_G(\sigma) = \{\tau \mid \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma\}$$

פועל טרנזיטיבית על השאריים מעל $\mathfrak{p}$ עם $\left(\frac{L/K}{\mathfrak{p}/\beta}\right) = \sigma$, והגרעין

הוא חבורת המייצב, כלומר $\langle\sigma\rangle$. לכן,

$$\alpha_{\sigma,\beta} = \frac{|C_G(\sigma)|}{f} = \frac{|G|}{f}\cdot\frac{|C_G(\sigma)|}{|G|} = \frac{|G|}{f\cdot|C|}$$

משפט מסלול-מייצב ⇐

$\square$

<u>מסקנה:</u> די לרשום ש- $\pi'(Y, L/K, \sigma) \approx \frac{Y^{1/f}}{\log Y}$.

נב' כעת ש- $\pi(X, L/K, C) \sim \frac{|C|}{|G|}\cdot\frac{X}{\log X} \sim \frac{|C|}{|G|}\pi_K(X)$ $\underbrace{}_{\text{(משפט צ'בוטרב)}}$

משפט שבגלל הוכחה (בהרצאה השלישית) הוא –

$$\pi(X, L/K, C) \sim \frac{|C|}{|G|}\cdot\frac{X}{\log X}$$

בנוסף שני להוכחה את המסקנה האחרונה.

<u>חסם עליון רק:</u>

$$\pi'(Y, L/K, \sigma) \ll Y^{1/f}$$

(כלומר יש N כך ש- $\pi'(Y, L/K, \sigma) \le C\cdot Y^{1/f}$)

<u>הוכחה:</u>

$$\sum_{\substack{\beta\in \mathcal{P}(K) \\ \left(\frac{L/K}{\beta/\mathfrak{p}}\right) = \sigma}} 1 \le [L:\mathbb{Q}] \sum_{\substack{p\in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \\ p = N_\mathfrak{p} \le Y^{1/f}}} 1 \ll Y^{1/f}$$

הערה: לא נכון ש- $\pi'(Y,L/K,\sigma) \geq \frac{Y^{1/f}}{\log Y}(1+o(1))$ לכל $\sigma\in G$, עבור

$$\pi'(Y,L/K,\sigma) \geq \frac{Y^{1/f}}{\log Y}\cdot\frac{|C|}{|G|}(1+o(1))$$

לכן אין יותר (כמובן) מאשר $|C|$ פי $\frac{Y^{1/f}}{\log Y}$ -ל וכנ"ל
מאחר ש- $\pi_{L/K}(Y)$ ו- $\pi'_{L/K}(Y) \sim \frac{Y^{1/f}}{\log Y}$, עבור למשל שיש ~
את המשפט.

הוכחת צ'בוטרב:

"עיקרון שימושי" "הפשטה": בפרט לא מוגבלת. אם נסתכל על $\beta\in\mathcal{P}_f(N)$ עם ... p בפרובניוס, אז ... מתחלק לפי

יוצא לספור קבוצות כגלואה. כמו כן יש תכונה שורש יחידה מסדר l.

אין ג'נרי שהם σ כלומר ... ושהם τ כלומר אחר.

$$\begin{array}{ccc}
L & \text{---} & L(\zeta)=N \\
 & D=N^{\Delta} & \\
K & \xrightarrow{\langle\tau\rangle} & K(\zeta) \\
| & & | \\
\mathbb{Q} & \xrightarrow{\langle\tau\rangle} & \mathbb{Q}(\zeta)
\end{array}$$

נבחר $l \geq 1$ ראשוני ויחידה ζ_l כך ש:

(1) $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ מופרדת ליניארית מ-K, כלומר $\mathbb{Q}(\zeta)\cap K=\mathbb{Q}$. כך קורה
אם $\gcd(l,\Delta_{K/\mathbb{Q}})=1$ כי ההרחבה $\mathbb{Q}(\zeta)$ מסועפת רק ב"ראשוני" שמחלקים
את l, ומצד שני K מסועפת רק בראשוניים המחלקים את $\Delta_{K/\mathbb{Q}}$.

(2) $f \mid [\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}] = [K(\zeta):K]$. כך קורה אם $l\equiv 1 \pmod f$.
(לפי (1)!)

יש בעיה משפטית בזה שהוכחנו קודם. ((הסתמך על צ'בוטרב הקלאסי)).

אז, $\langle\tau\rangle = Gal(K(\zeta)/K)$, $f \mid ord(\tau) = f' = l-1$. נסמן $N=L(\zeta)$. אז:

$$Gal(N/K) \cong G\times\langle\tau\rangle$$
$$\varphi \mapsto (\varphi|_L, \varphi|_{K(\zeta)})$$

נסמן $\rho=(\sigma,\tau)$, $\Delta=\langle\rho\rangle$. ($\rho$ פועל על L כמו σ, ועל $K(\zeta)$ כמו τ).
וגם $D=N^{\Delta}$.

רוצים לספור -

$$\underbrace{\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{P}(N)\\ \left(\frac{N/K}{\beta/P_K}\right)=\rho}} 1}_{} \;=\; \overset{\text{I}}{\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{P}(N)\\ \left(\frac{N/D}{\beta/P_K}\right)=\rho}} 1} \;-\; \overset{\text{II}}{\sum_{\substack{\beta\in\mathcal{P}(N)\\ \left(\frac{N/D}{\beta/P_K}\right)=\rho,\ f(\beta/P_K)>1}} 1} \;+\; \underbrace{O(1)}_{\text{מסועפים}}$$

$$\left(\frac{N/K}{\beta/P_K}\right)=\rho \iff \left(\frac{N/D}{\beta/P_D}\right)=\rho \;\wedge\; f(P_D/P_K)=1$$

כי $\mathcal{D}(N/D) = \mathcal{D}(N/K)\cap Gal(N/D)$.

$$\text{(I)}-\ \sum_{\substack{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}(N)\\ \left(\frac{N/D}{\mathfrak{P}/P_K}\right)=\rho}} 1 \sim Y^{1/f}/\log Y$$

שכן N/D ציקלוטומית.

$$D\cdot K(\zeta)=D(\zeta)=N \iff \Delta\cap G\times\{1\}=1 \iff$$

$$\iff \underbrace{\{(\sigma^i,\tau^i)=(\sigma^i,1)\}}_{\text{יש רק ש-}}=1$$

אם לא קונסה ; $|\operatorname{ord}(\tau)|$ $f=\operatorname{ord}(\sigma)$ נוכל $\sigma^i=1$.
לכן תנאי המרכזי קורה.

$$\text{(II)}-\ \left(\frac{N/D}{P/P_D}\right)=\rho,\ f(P_D/P_K)>1 \Rightarrow f(P/P_K)\geq f\cdot f(P_D/P_K)\geq 2\operatorname{ord}(\rho)$$

לכן, $\operatorname{ord}(\rho)$

$$\sum_{\substack{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}(N)\\ \left(\frac{N/D}{P/P_D}\right)=\rho\\ f(P_D/P_K)>1}} 1 \ll Y^{1/2\operatorname{ord}(\rho)}$$

כי הסדר של σ לא הסדר של ρ

$$\sum_{\substack{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}(N)\\ \left(\frac{N/K}{P/P_K}\right)=\rho}} 1 \sim \frac{Y^{1/\operatorname{ord}(\rho)}}{\log Y}=\frac{Y^{1/\operatorname{ord}(\tau)}}{\log Y}$$ — ש-נוסחיים $\Leftarrow$

עכשיו,

$$\sum_{\substack{Q\in\mathcal{P}(L)\\ \left(\frac{L/K}{Q/P}\right)=\sigma\\ N_Q\leq Z}} 1 \geq \overset{\text{בשוויון מספרים}}{O(1)} + \sum_{\substack{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}(N)\\ \left(\frac{N/K}{P/P_K}\right)=\rho\\ N_P\leq Y}} 1/n\,,\quad n=\#\{P_L \text{ מעל } P\}=\frac{\operatorname{ord}\tau}{f(P/P_L)}=\frac{\operatorname{ord}\tau}{\operatorname{ord}\tau/\operatorname{ord}\sigma}=\boxed{\operatorname{ord}(\sigma)}$$

כמו בתחילת ההוכחה L/K אלגברי

עבור $\mathfrak{P}$ כנ"ל,

$$N_{N/L}(\mathfrak{P})=P_L^{\,f(P/P_L)}\,,\quad f(P/P_L)=|\langle\rho\rangle\cap\{1\}\times\langle\tau\rangle|=|\langle(1,\tau^i)\rangle|=\frac{\operatorname{ord}(\tau)}{\operatorname{ord}(\sigma)}$$

סדר מחלקת הסעיף

$$N_Q\leq Z \iff N_Q^{\operatorname{ord}\tau/\operatorname{ord}\sigma}\leq Z^{\operatorname{ord}\tau/\operatorname{ord}\sigma} \iff$$

$$\iff N_P\leq Z^{\operatorname{ord}\tau/\operatorname{ord}\sigma}$$

לכן ניקח $Y=Z^{\operatorname{ord}\tau/\operatorname{ord}\sigma}$.

לסיכום,

$$\pi'(Z;L/K,\sigma)\geq O(1)+\frac{1}{\operatorname{ord}(\sigma)}\left(Z^{\operatorname{ord}\tau/\operatorname{ord}\sigma}\right)^{1/\operatorname{ord}(\tau)}\Big/\log\left(Z^{\operatorname{ord}\tau/\operatorname{ord}\sigma}\right)=$$

$$=O(1)+\frac{1}{\operatorname{ord}(\tau)}\,\frac{Z^{1/\operatorname{ord}(\sigma)}}{\log Z}$$

סוף ההוכחה